

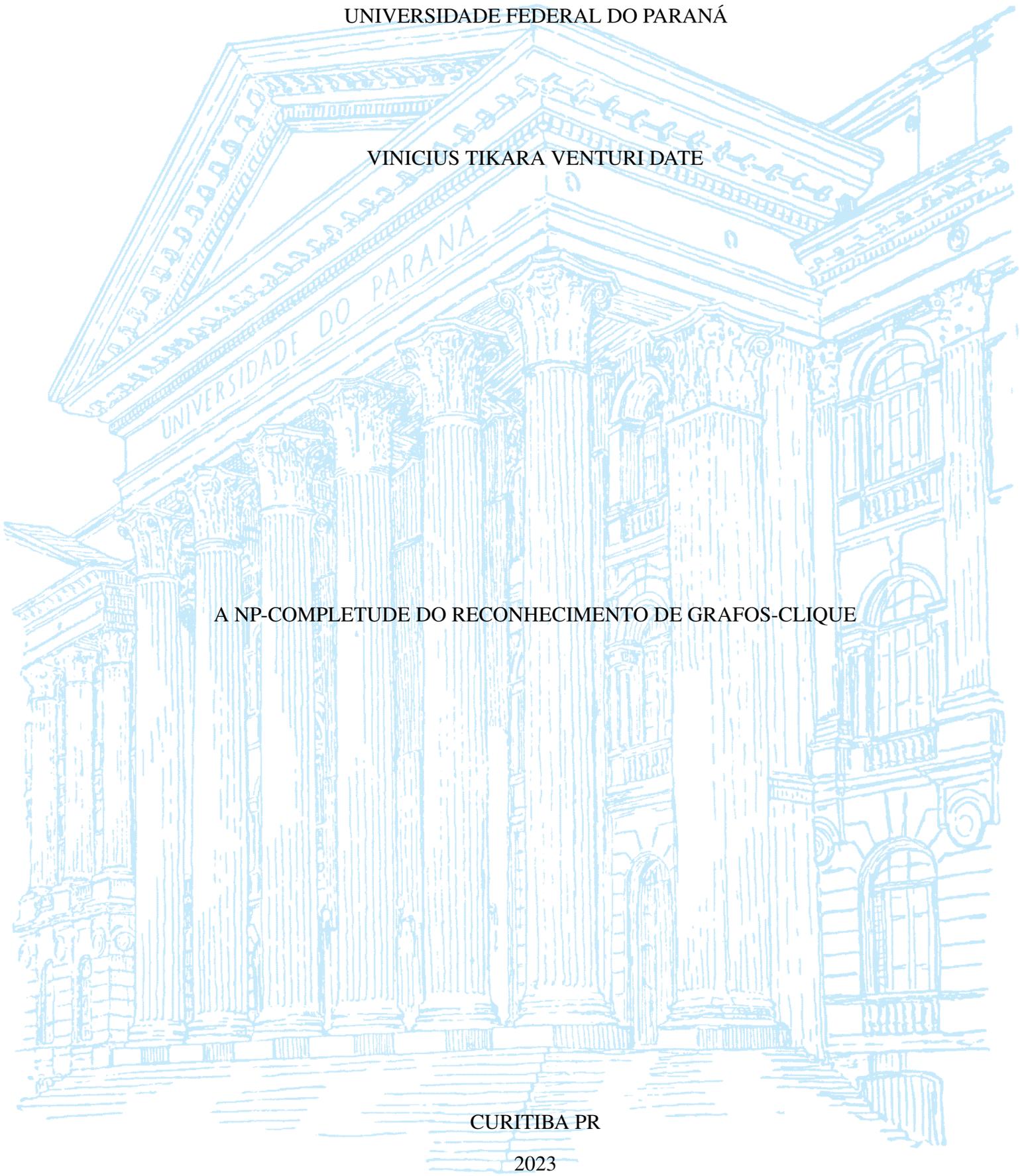
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

VINICIUS TIKARA VENTURI DATE

A NP-COMPLETUDE DO RECONHECIMENTO DE GRAFOS-CLIQUE

CURITIBA PR

2023



VINICIUS TIKARA VENTURI DATE

A NP-COMPLETUDE DO RECONHECIMENTO DE GRAFOS-CLIQUE

Trabalho apresentado como requisito parcial à conclusão do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Área de concentração: *Ciência da Computação*.

Orientador: André Luiz Pires Guedes.

CURITIBA PR

2023

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus amigos que me ajudaram durante todo o processo, me incentivando e ajudando da forma que podiam, principalmente ao ler e apontar erros de redação e, de forma geral, pela amizade que temos.

Ao professor André Luiz Pires Guedes, por sua total compreensão ao me orientar.

Aos meus pais por todo apoio não só nesse trabalho, mas durante toda a vida.

## RESUMO

O reconhecimento do Grafo Clique é problema cuja dificuldade foi amplamente estudada. Como tema central temos a prova de Alcón et al. (2009) de que este problema é *NP-completo*. O objetivo central do trabalho é evidenciar a base teórica necessária para a demonstração, o histórico do problema e a própria demonstração. A primeira parte a ser abordada são as áreas de Teoria dos Grafos e Complexidade Computacional. Em seguida o problema e definições são descritas. Por fim, a demonstração principal é explicada, com o auxílio de imagens.

## ABSTRACT

The Clique Graph recognition is a problem which difficult has been widely studied. From those studies came Alcón et al. (2009)'s proof which states that the problem is in the  $\mathcal{NP}$ -complete class. The main objective of the work is to explain the necessary theoretical base to understand the proof, the history of the problem and the proof itself. We start by adressing the Graph Theory and Complexity areas of study. Following that, the problem and its definitions are given. Finally, the main proof is laid out, with the help of images.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS</b>	<b>7</b>
2.1	COMPLEXIDADE	7
2.1.1	Redução	7
2.2	GRAFOS	8
2.2.1	Definições básicas.	8
2.2.2	Grafo Completo	9
2.2.3	Subgrafos	9
2.2.4	Cliques	10
<b>3</b>	<b>LITERATURA RELACIONADA</b>	<b>11</b>
3.1	GRAFO CLIQUE E SUAS CARACTERIZAÇÕES	11
3.1.1	Propriedade Helly	11
3.1.2	Caracterização de Hamelink	12
3.1.3	Caracterização de Roberts e Spencer	12
3.1.4	Generalização de Alcón e Gutierrez	14
<b>4</b>	<b>GRAFO CLIQUE É <math>NP</math>-COMPLETO</b>	<b>15</b>
4.1	O PROBLEMA DE RECONHECIMENTO GRAFO CLIQUE É $NP$ -COMPLETO	15
4.1.1	Grafo Clique pertence a $NP$	15
4.1.2	Família-RS	15
4.1.3	$3SAT_3$	15
4.2	GRAFO OBTIDO A PARTIR DA REDUÇÃO	16
4.2.1	Exemplo de grafo	22
4.2.2	Conclusão	26
4.3	$NP$ -COMPLETUDE	26
4.3.1	Triângulos nem em um $K_{12}$ ou em um $K_5$	28
4.3.2	Triângulos em um $K_{12}$ ou em um $K_5$	31
4.3.3	Exemplo de Família-RS a partir das instruções.	38
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>43</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>44</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O grafo clique de um grafo  $G$  é definido como o grafo de intersecção das cliques de  $G$ . O Problema do Grafo Clique tem como objetivo determinar se um grafo  $H$  qualquer é grafo clique de outro grafo  $G$ .

O grafo clique foi abordado pela primeira vez por Hamelink (1968), com a ideia de intersecção de cliques e uma condição suficiente, mas não necessária, para sua caracterização. Essa caracterização abordada por Hamelink postula que se as cliques de um grafo tiverem a propriedade Helly, então ele é um grafo clique.

Alguns anos após essa caracterização parcial, Roberts e Spencer (1971) conseguiram definir a caracterização completa, ao utilizar o trabalho de Hamelink com uma segunda condição, as cliques deste grafo também precisam cobrir todas as arestas dele. Por mais completa que essa caracterização seja, a complexidade do problema do grafo clique ainda era uma discussão em aberto.

Alcón e Gutierrez (2004) demonstraram uma maneira de checar se o grafo é grafo clique, baseada nos triângulos do grafo a ser investigado. Por fim Alcón et al. (2009) puderam responder a complexidade do Problema do Grafo Clique, e a qual classe ele pertence, notavelmente, a sua inclusão na classe  $NP$ -completo.

O objetivo deste trabalho é evidenciar a  $NP$ -completude do Problema do Grafo Clique, pela revisão das caracterizações e de um aprofundamento da demonstração principal.

A demonstração da  $NP$ -completude necessita de uma fundamentação teórica, com enfoque nas áreas de Complexidade Computacional e Teoria dos Grafos. A primeira tem como objetivo avaliar a dificuldade de um dado problema computacional e a segunda aborda conceitos essenciais utilizados na demonstração principal, como o conceito de clique.

Apresentamos os fundamentos necessários no Capítulo 2, primeiro ao descrever a Complexidade na Seção 2.1, com as definições das classes, e, em seguida, a base teórica de grafos na Seção 2.2, como os subgrafos completos e cliques. No Capítulo 3, abordamos as caracterizações do grafo clique obtidas até agora: Hamelink (Seção 3.1.2), Roberts e Spencer (Seção 3.1.3) e por fim a mais recente, Alcón e Gutierrez (Seção 3.1.4). Portanto, com essa fundamentação, a prova principal pode ser abordada no Capítulo 4 e as conclusões são apresentadas em seguida no Capítulo 5.

## 2 FUNDAMENTOS

Apresentaremos os conceitos básicos de Complexidade Computacional, como as classes pertinentes ao nosso estudo e a relação entre elas. Além disso, exibiremos o mínimo necessário de Teoria dos Grafos para o entendimento da demonstração principal.

### 2.1 COMPLEXIDADE

De acordo com Papadimitriou (1994), a Complexidade Computacional é uma área da Ciência da Computação que tem como objetivo compreender o uso de recursos computacionais para resolver um dado problema computacional.

Um *recurso computacional* é definido como o tempo ou espaço utilizado por uma solução de um problema computacional; neste trabalho, o recurso analisado é o tempo. Uma solução computacional, por sua vez, é dada por um *algoritmo* que resolve o problema apresentado.

O estudo da complexidade computacional também aborda as *reduções polinomiais*, uma das ferramentas para a comparação de problemas distintos.

Para nosso estudo iremos examinar as classes  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{NP}$ ,  $\mathcal{NP}$ -difícil e  $\mathcal{NP}$ -completo.

A classe de problemas  $\mathcal{P}$  contém os problemas de decisão<sup>1</sup> que podem ser resolvidos por uma Máquina de Turing Determinística (MTD) em tempo polinomial. Formalmente, dizemos que um problema  $D$  está em  $\mathcal{P}$  se existe uma MTD  $M$  tal que:

- Para toda entrada,  $M$  executa em tempo polinomial no tamanho da entrada;
- Para toda entrada  $x$  que  $D$  tem resposta verdadeira,  $M$  retorna 1;
- Para toda entrada  $x$  que  $D$  tem resposta falsa,  $M$  retorna 0.

A classe  $\mathcal{P}$  contém os problemas de decisão que tem uma solução eficiente.

A classe de problemas  $\mathcal{NP}$  contém os problemas de decisão que podem ser resolvidos por uma Máquina de Turing Não-Determinística (MTND) em tempo polinomial. Essa classe também pode ser classificada como os problemas de decisão cujas instâncias positivas possuem certificados polinomiais que podem ser verificados por uma MTD em tempo polinomial.

Formalmente, se  $D$  é um problema de decisão  $\mathcal{NP}$ , então existe uma MTD  $V$  (verificadora) tal que, para cada instância  $x$ , com a ajuda de um certificado polinomial  $y$ , a MTD  $V$  aceita  $x$  e  $y$  em tempo polinomial se  $x$  tem resposta positiva para  $D$  e  $y$  for um certificado para este fato. Um exemplo é o problema de decidir se um número  $x$  não é primo<sup>2</sup>. Um certificado possível é um divisor  $y$  de  $x$ . É fácil verificar, ou seja, é polinomialmente verificável no tamanho de  $x$  se  $y$  divide  $x$  e, portanto, é possível confirmar que  $x$  tem resposta positiva.

#### 2.1.1 Redução

Uma *redução* é um procedimento que permite a transformação de um problema em outro. Assim, se um problema  $A$  pode ser reduzido para um problema  $B$ , caso exista um algoritmo que resolva  $B$ , então temos um algoritmo que resolve  $A$ .

Formalmente, uma redução  $f$  é um mapeamento das instâncias  $i_A$  de um problema  $A$  para instâncias  $f(i_A)$  de um outro problema  $B$ , de tal modo que,  $i_A$  é uma instância verdadeira

<sup>1</sup>Um problema de decisão é um problema para o qual se espera como resposta apenas "sim" ou "não", para cada instância do problema

<sup>2</sup>Note que a resposta "sim" significa que o número não é primo.

para  $A$  se e somente se  $f(i_A)$  é uma instância verdadeira para  $B$ . O uso da redução para computar  $A$  usando  $B$  é apresentado na Figura 2.1.

Por fim, uma redução  $f$  é dita **polinomial** se o mapeamento das instâncias de um problema nas instâncias de outro é feito em tempo polinomial.

Podemos denotar que um problema  $A$  é redutível polinomialmente a um problema  $B$  da seguinte forma:

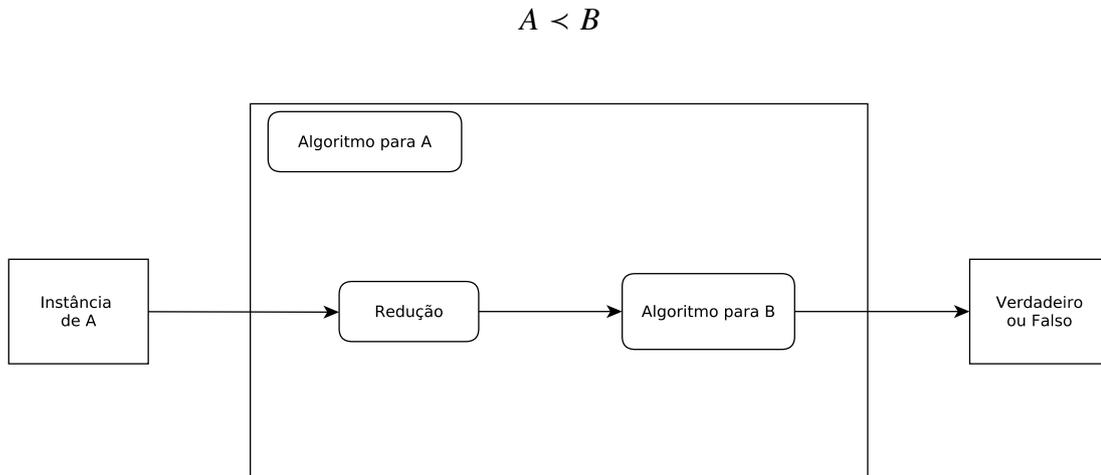


Figura 2.1: Um esquema para resolver  $A$ , dado que  $A < B$

Uma consequência da existência de uma redução polinomial de  $A$  para  $B$  é a comparação da dificuldade desses dois problemas, uma vez que ela nos diz que o problema  $B$  é pelo menos tão complicado quanto o problema  $A$ .

A classe de problemas  $\mathcal{NP}$ -difícil consiste dos problemas que são pelo menos tão difíceis quanto os problemas mais difíceis em  $\mathcal{NP}$ . Formalmente, um problema  $A$  é dito  $\mathcal{NP}$ -difícil se para todo problema  $B$  em  $\mathcal{NP}$  existe uma redução de  $B$  para  $A$ .

A classe dos problemas  $\mathcal{NP}$ -completo é aquela que contém problemas que estão nas classes  $\mathcal{NP}$  e  $\mathcal{NP}$ -difícil. Desta forma, um algoritmo que resolve um problema da classe  $\mathcal{NP}$ -completo de forma eficiente resolveria todos os problemas de  $\mathcal{NP}$ .

## 2.2 GRAFOS

### 2.2.1 Definições básicas

Um *grafo*  $G$  é dado por um conjunto de objetos, chamado de *vértices*, e suas relações, chamadas de *arestas*. (Bondy e Murty, 2011) define um grafo  $G$  como um par ordenado  $(V(G), E(G))$  que consiste de um conjunto  $V(G)$  de vértices e um conjunto  $E(G)$  de arestas. A definição formal segue:

$$G = (V, E)$$

$V(G)$  é um conjunto finito de vértices

$$E(G) \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V \text{ e } u \neq v\}$$

Denotaremos a aresta  $\{u, v\}$  simplesmente como  $uv$ .

### 2.2.2 Grafo Completo

Um grafo  $G = (V, E)$  é *completo* se todos os pares de vértices têm uma aresta entre si, uma definição possível de grafo completo a seguir:

$$G = (V, E)$$

$V(G)$  é um conjunto finito de vértices

$$E(G) = \{uv \mid u, v \in V \text{ e } u \neq v\}$$

A nomenclatura utilizada para os grafos completos é  $K_n$ , na qual  $n$  denota o número de vértices do grafo. A Figura 2.2 contém um exemplo de um  $K_5$ .

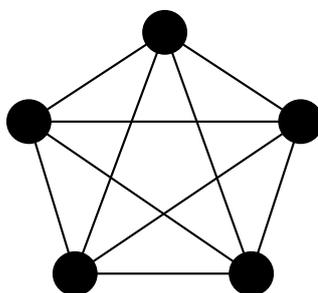


Figura 2.2: Exemplo de um  $K_5$

### 2.2.3 Subgrafos

Dizemos que um grafo  $F$  é um *subgrafo* de  $G$  se

$$V(F) \subseteq V(G)$$

$$E(F) \subseteq E(G)$$

A Figura 2.3 mostra um grafo e seu subgrafo demarcado com a cor laranja.

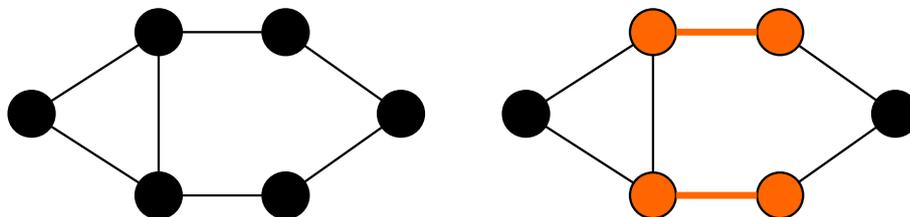


Figura 2.3: Um grafo e um subgrafo possível, com os vértices e arestas coloridos em laranja

### 2.2.4 Cliques

Uma *clique*  $C$  de um grafo  $G$  é um subgrafo de  $G$  no qual todos vértices são adjacentes.  $C$  é, portanto, um subgrafo de  $G$  que é um grafo completo. Além disso, as cliques não são subgrafos próprios de outra clique. Por fim, uma clique não maximal é chamada apenas de *subgrafo completo*, ou *completo*, para brevidade.

Na Figura 2.4, temos as cliques que compõe o grafo:  $K_2$ ,  $K_3$  e  $K_4$ .

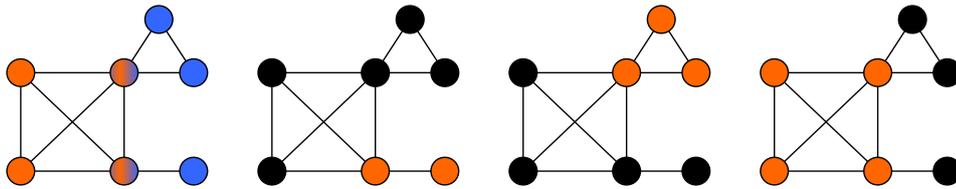


Figura 2.4: Um grafo e suas cliques

### 3 LITERATURA RELACIONADA

Os primeiros estudos sobre a *classe de Grafos Clique* começaram em 1968, ano no qual Hamelink descreve uma caracterização parcial dela. Sua primeira caracterização completa veio em seguida, em 1971, por Roberts e Spencer, contudo, não foi suficiente para compreender a dificuldade de seu problema de reconhecimento. Em 2009, Alcón e Gutierrez classificaram a complexidade do problema. Elas consideraram os resultados de seu próprio trabalho de 2004, em que generalizaram a caracterização do Grafo Clique aos triângulos do grafo.

#### 3.1 GRAFO CLIQUE E SUAS CARACTERIZAÇÕES

O grafo clique de  $G$  é representado por  $K(G)$ . Dado um grafo  $G = (V, E)$ , e  $C$  o conjunto das cliques de  $G$ , o grafo clique  $H = K(G)$  é dado da seguinte forma:

$$V(H) = C$$

$$E(H) = \{uv \mid u, v \in C, u \cap v \neq \emptyset\}$$

A Figura 3.1 traz um exemplo de grafo clique, com os vértices de  $K(G)$  representados pelas cliques:  $K_4$ ,  $K_3$  e  $K_2$ .

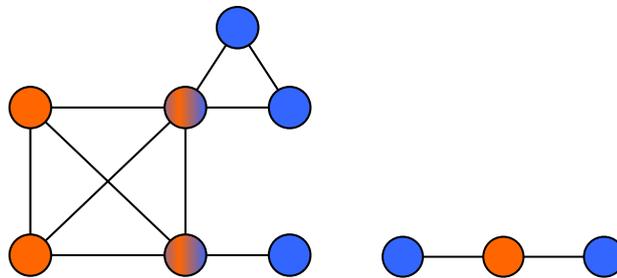


Figura 3.1: Um grafo  $G$  a esquerda com as cliques:  $K_3$  (acima, em azul),  $K_4$  (no meio, em laranja) e  $K_2$  (abaixo, em azul). O grafo clique  $H = K(G)$  correspondente ao lado direito do grafo  $G$ , com os vértices pintados das mesmas cores das cliques.

##### 3.1.1 Propriedade Helly

Uma família de conjuntos  $F$  é chamada de *dois a dois intersectante* se existe intersecção não vazia para qualquer par  $x, y \in F$ .

Uma família  $\mathcal{T}$  de conjuntos têm a propriedade *Helly* se qualquer **subfamília** dois a dois intersectante tem intersecção total não vazia.

Uma característica da propriedade Helly foi definida por Berge (1987), ele postula o seguinte fato:

**Fato 1** ((Berge, 1987)). *Uma família  $\mathcal{F}$  de conjuntos tem a propriedade Helly se e somente se, para qualquer tripla de elementos, a subfamília de conjuntos que contêm pelo menos dois desses três elementos tem uma intersecção não vazia.*

### 3.1.2 Caracterização de Hamelink

Hamelink (1968) introduziu a condição suficiente para que um grafo seja grafo clique de outro. A condição impõe que se o conjunto de todas os completos de um grafo  $H$  tiverem a propriedade Helly, então  $H$  é grafo clique.

### 3.1.3 Caracterização de Roberts e Spencer

Em (Roberts e Spencer, 1971), os autores encontraram a condição necessária e suficiente para que um grafo  $H$  seja grafo clique de um grafo  $G$ .

Segundo os autores, o grafo  $H$  é um grafo clique se e somente se existe um conjunto de completos  $\mathcal{K} = \{L_1, L_2, \dots, L_i\}$  de  $H$  que satisfaça as seguintes propriedades:

1.  $\mathcal{K}$  cobre<sup>1</sup> todas as arestas de  $H$ ;
2.  $\mathcal{K}$  tem a propriedade Helly.

Para a suficiência, seja  $\mathcal{K}$  um conjunto que cobre todas as arestas e é Helly, definiremos um grafo  $G$  a partir de  $H$  a seguir:

- i)  $V(G) = \{\{h\} \mid h \in V(H)\} \cup \mathcal{K}$
- ii) Para  $A, B \in V(G)$ ,  $AB \in E(G)$  se e somente se  $A \cap B \neq \emptyset$

A partir desse grafo  $G$ , mostraremos que  $H = K(G)$ .

Seja  $C(h)$  o conjunto dos vértices de  $G$  (que são completos de  $H$ ) com vértice  $h$  como elemento. Cada  $C(h)$  é uma clique de  $G$ . Essas são as únicas cliques de  $G$ , pois, seja  $C$  um completo de  $G$ , se  $C$  contém um vértice de  $H$ , então  $C \subseteq C(h)$ . Se  $C$  não contiver um vértice de  $H$ , então  $C$  é contida em algum  $C(h)$  pela propriedade Helly.

Na Figura 3.2, temos o exemplo de um grafo  $H$  e seu grafo  $G$  obtido pelas instruções acima, com o conjunto de completos  $\mathcal{K} = \{A, B, C\}$ ,  $A = \{\{1, 2\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{4, 5\}\}$  que cobre todas as arestas e tem propriedade Helly.

Temos os seguintes  $C(h)$  para esse grafo:

- $C(1) = \{\{1\}, A\}$
- $C(2) = \{\{2\}, A, B\}$
- $C(3) = \{\{3\}, B\}$
- $C(4) = \{\{4\}, B, C\}$
- $C(5) = \{\{5\}, C\}$

Se aplicarmos o operador  $K(G)$ , obtemos  $H$ .

Para provar a necessidade, suponha que  $H = K(G)$ . Temos que mostrar que existe um conjunto de completos de  $H$  que cobre todas as arestas e tem a propriedade Helly.

Tomemos  $V(G) = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ,  $V(H) = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ , e  $K_1, K_2 \dots K_m$  como as cliques de  $G$ , nomeadas de tal forma que  $h_i h_j \in E(H) \iff K_i \cap K_j \neq \emptyset$ .

<sup>1</sup>Onde cobrir uma aresta é ter seus dois vértices inclusos no conjunto.

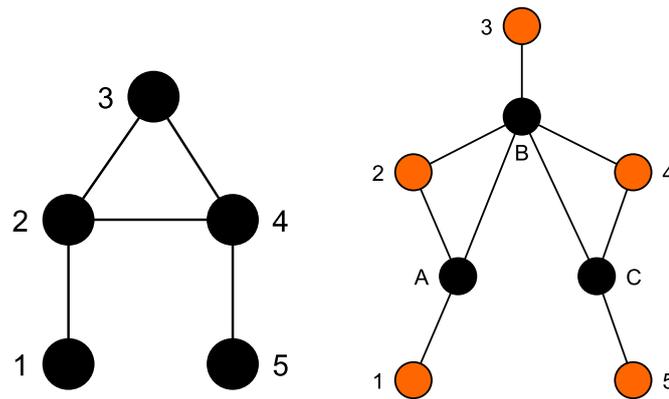


Figura 3.2: Um grafo  $H$  e seu o grafo  $G$  obtido pela definição

Para cada vértice de  $G$ , defina  $L_i = \{h_j \mid g_i \in K_j\}$ , as cliques associadas ao vértice de  $G$ . Cada  $L_i$  é um conjunto completo em  $H$  pois, se  $h_j, h_k \in L_i$ , então  $g_i \in K_j \cap K_k$  e, portanto,  $h_j h_k \in E(H)$ .

Iremos mostrar que  $\mathcal{K} = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$  tem ambas as propriedades: propriedade 1) é satisfeita pois, se existe aresta entre vértices de  $H$ , então as cliques que representam esses vértices tem intersecção não nula. Ou seja, toda intersecção de cliques tem aresta correspondente em  $H$ , e essas são as únicas arestas de  $H$ , que por sua vez, são cobertas por  $\mathcal{K}$ .

Em seguida, precisamos provar que a propriedade 2) é satisfeita por  $\mathcal{K}$ . Suponha que  $F$  é uma família intersectante dois a dois de  $\mathcal{K}$ . Então, existe um vértice  $h_{ij}$  que está na intersecção de dois membros  $L_i, L_j \in \mathcal{K}$ , o que se traduz em vértices de  $g_i$  e  $g_j$  que estão no mesmo completo  $K$ , logo existe a aresta  $g_i g_j$ .

Essa mesma ideia se repete a todos os pares  $(i, j)$  de membros de  $\mathcal{K}$ . No fim, como são intersectantes dois a dois, existe um completo  $K_s$  que precisa conter todos  $L_i$ , ou seja, a intersecção de  $F$  é não nula, portanto,  $\mathcal{K}$  tem a propriedade Helly.

Como um exemplo, seja  $F = \{a, b, c, d\}$  uma subfamília, se  $F$  é intersectante dois a dois, então as intersecções são as seguintes:  $a \cap b$ ;  $a \cap c$ ;  $a \cap d$ ;  $b \cap c$ ;  $b \cap d$ ;  $c \cap d$ . Portanto, existem as seguintes arestas:  $g_a g_b$ ,  $g_a g_c$ ,  $g_a g_d$ ,  $g_b g_c$ ,  $g_b g_d$ ,  $g_c g_d$ , que formam um  $K_4$ , que é justamente a clique que fica na intersecção da subfamília  $F$ .

Nesse mesmo artigo dois fatos são provados por Roberts e Spencer (1971), eles serão usados na prova da  $\mathcal{NP}$ -completude.

**Fato 2** (Lema 1 de (Roberts e Spencer, 1971)). *Seja  $\mathcal{F}$  uma Família-RS de  $G$ . Então  $\mathcal{F}$  contém uma clique de tamanho 2 se e somente se essa clique é maximal em  $G$ .*

Na nossa instância do problema do grafo clique, as arestas serão todas contidas em algum triângulo. Desta forma, nenhuma clique de tamanho 2 é maximal.

**Fato 3** (Prova do Teorema 3 de (Roberts e Spencer, 1971)). *Se um triângulo  $T$  é um completo de  $G$ , então  $T$  é membro de toda cobertura por completos de  $G$  que satisfaça a propriedade Helly.*

Nessa mesma instância do problema existem diversos vértices de grau 2. Cada um desses vértices está contido em exatamente um triângulo auxiliar  $T$ , o que implica que esse triângulo é um completo. Esse fato é usado na demonstração principal, qualquer triângulo deste tipo é membro de qualquer cobertura por completos possível.

### 3.1.4 Generalização de Alcón e Gutierrez

Alcón e Gutierrez (2004) apresentaram uma generalização da caracterização de Roberts e Spencer, a partir do uso dos triângulos desse grafo e os completos que compartilham uma aresta com esses triângulos. Nosso interesse é em uma das equivalências provadas, que futuramente nos ajudará à montar um certificado para o Problema do Grafo Clique.

Antes de partirmos para a generalização, é necessário definir um tipo de subfamília: dado um triângulo  $T$ , a subfamília de membros de  $\mathcal{F}$ , na qual os membros são completos, defina  $\mathcal{F}_T$  como os completos com pelo menos dois vértices de  $T$ .

No trabalho delas, é postulado que os três pontos a seguir são equivalentes, para uma família  $\mathcal{F}$  de completos de um grafo  $G$ :

1.  $\mathcal{F}$  tem a propriedade Helly
2. Para todo triângulo  $T \in T(G)$ , a subfamília  $\mathcal{F}_T$  tem a propriedade Helly.
3. Para todo triângulo  $T \in T(G)$ , a subfamília  $\mathcal{F}_T$  tem intersecção não vazia.

Primeiro mostraremos que  $1 \implies 2$ :

Se  $\mathcal{F}$  tem a propriedade Helly, então qualquer subfamília tem a propriedade Helly, em particular, a subfamília  $\mathcal{F}_T$  tem a propriedade Helly.

Consequentemente, demonstraremos que  $2 \implies 3$ :

Sabemos que  $\mathcal{F}_T$  é dois a dois intersectante, já que todo conjunto de  $\mathcal{F}_T$  tem dois dos vértices do triângulo  $T$ . Então, se  $\mathcal{F}_T$  tem a propriedade Helly, logo não tem intersecção vazia (pelo Fato 1).

Por fim, presuma que 3 é verdadeiro mas  $\mathcal{F}$  não tem a propriedade Helly, ou seja, é falso que  $3 \implies 1$ .

Então deve haver uma subfamília  $\mathcal{F}'$  que é dois a dois intersectante mas não tem intersecção total. Podemos tomar a família mínima, para ser dois a dois intersectante com intersecção nula,  $\mathcal{F}'$  tem pelo menos três membros,  $A_1, A_2$  e  $A_3$ . Consideraremos os vértices  $v_1, v_2, v_3$  como membros das 3 intersecções dois a dois ( $v_1 \in A_1 \cap A_2$ ,  $v_2 \in A_2 \cap A_3$  e  $v_3 \in A_1 \cap A_3$ ).

Esses vértices formam um triângulo  $T$  em  $G$ . Claramente  $\mathcal{F}'$  é uma subfamília de  $\mathcal{F}_T$ , que por hipótese tem intersecção não vazia, logo  $\mathcal{F}'$  também tem intersecção não vazia. Uma contradição. Logo,  $3 \implies 1$ .

## 4 GRAFO CLIQUE É $\mathcal{NP}$ -COMPLETO

### 4.1 O PROBLEMA DE RECONHECIMENTO GRAFO CLIQUE É NP-COMPLETO

O problema do grafo clique pode ser enunciado como um problema de decisão:

Instância: Um grafo  $G$ .

Pergunta: Existe um grafo  $H$  tal que  $G = K(H)$ ?

Ou seja, dado um grafo  $G$ , determinar se ele é grafo clique de algum grafo  $H$ .

#### 4.1.1 Grafo Clique pertence a $\mathcal{NP}$

Alcón et al. (2009) provaram que o problema de reconhecimento do grafo clique está em  $\mathcal{NP}$ , sugerindo um certificado dado pela generalização vista na Seção 3.1.4, a partir uma cobertura por completos  $\mathcal{F}$ . Elas mostram então que essa cobertura pode ter tamanho polinomial.

Seja  $\mathcal{F}$  uma cobertura por completos de um grafo  $G = (V, E)$ . Adote o seguinte algoritmo guloso para montar uma subfamília  $\mathcal{F}'$ : para cada aresta  $e \in E$ , cubra  $e$  com um completo de  $\mathcal{F}$ , e, após isso, cubra as arestas restantes da mesma forma, com completos de  $\mathcal{F}$ . Esse procedimento nos dá uma subfamília  $\mathcal{F}'$  de tamanho no máximo  $|E|$ . Perceba também que nenhum membro de  $\mathcal{F}'$  está contido em outro.

Desta forma, ao usar a generalização de Alcón e Gutierrez, podemos considerar as triplas de vértices  $a, b, c$  de  $G$  que são um triângulo  $T$ . Consideramos os membros de  $\mathcal{F}'_T$  e, para todo vértice do grafo  $G$ , se  $v$  pertence à intersecção de  $\mathcal{F}'_T$ . Isso produz um algoritmo que checa em tempo  $O(|V|^4|E|)$  se uma cobertura por completos  $\mathcal{F}'$  de tamanho  $O(|E|)$  tem a propriedade Helly. Portanto o problema pertence à classe  $\mathcal{NP}$ .

#### 4.1.2 Família-RS

O certificado do problema de decisão estar em  $\mathcal{NP}$  nos traz uma consequência: um grafo  $G$  tem uma cobertura de arestas por completos com a propriedade Helly se e somente se o grafo  $G$  admite uma cobertura por completos com a propriedade Helly sem que um membro esteja contido em outro. O nome dessa cobertura é chamada de Família-RS do grafo, nomeada por Alcón et al. (2009), onde RS se refere à Roberts e Spencer.

Logo é possível caracterizar os grafos clique da seguinte forma:

- A cobertura por completos tem a propriedade Helly
- Nenhum completo está contido em outro completo

Desta forma  $G$  é um grafo clique se e somente se  $G$  tem uma Família-RS.

#### 4.1.3 $3SAT_3$

O  $3SAT_3$  é uma versão do  $3SAT$  em que cada variável ocorre no máximo 3 vezes.

Uma instância do  $3SAT_3$  é definida como:  $I = (U, C)$ , na qual  $U = \{u_i, 1 \leq i \leq n\}$ , um conjunto de variáveis booleanas e  $C = \{c_j, 1 \leq j \leq m\}$ , um conjunto de cláusulas com

elementos de  $U$ . Cada cláusula de  $C$  tem de duas a três variáveis e cada variável  $u_i$  ocorre no máximo três vezes em  $C$ .

O  $3SAT_{\bar{3}}$  pertence à classe  $\mathcal{NP}$ -completo, fato obtido a partir da redução do  $3SAT$  para o  $3SAT_{\bar{3}}$ :

Seja  $x$  uma variável que aparece  $k$  ( $k > 3$ ) vezes numa expressão do  $3SAT$ . Substituímos a primeira ocorrência de  $x$  por  $x_1$ , a segunda por  $x_2$ , e assim por diante. As novas variáveis são  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

Agora precisamos que as novas variáveis mantenham o mesmo valor que  $x$ , para tal podemos adicionar  $k$  novas cláusulas à nossa redução que garantem a valoração:

$$(\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_4) \wedge \dots (\bar{x}_k \vee x_1)$$

Desta forma  $3SAT < 3SAT_{\bar{3}}$ , e, portanto,  $3SAT_{\bar{3}}$  é  $\mathcal{NP}$ -completo.

## 4.2 GRAFO OBTIDO A PARTIR DA REDUÇÃO

Alcón et al. (2009) propõem um grafo  $G_I$  a partir de uma instância do  $3SAT_{\bar{3}}$  e este grafo será utilizado na demonstração da  $\mathcal{NP}$ -completude do problema do grafo clique.

Seja  $I = (U, C)$  uma instância do  $3SAT_{\bar{3}}$ , sem perda de generalidade, presuma que cada variável ocorre 2 ou 3 vezes em  $C$ , e nenhuma variável ocorre duas vezes na mesma cláusula. Além disso, se a variável  $u_i$  ocorre duas vezes em  $C$ , então ela ocorre uma vez como o literal  $u_i$  e outra como o literal  $\bar{u}_i$ . Por fim, se  $u_i$  ocorre três vezes em  $C$ , uma delas é como o literal  $u_i$  e as duas restantes como o literal  $\bar{u}_i$ .

Para cada variável  $u_i$ , seja  $j_i$  o subíndice da cláusula em que a variável  $u_i$  ocorre como o literal  $u_i$  e  $\bar{J}_i = \{j \mid \text{literal } \bar{u}_i \text{ ocorre em } c_j\}$ .

Para cada cláusula  $c_j$  com três variáveis, seja  $I_j = \{i \mid \text{variável } u_i \text{ ocorre em } c_j\}$ . Se  $c_j$  tem duas variáveis, então iremos preencher essa cláusula  $c_j$  com uma variável extra, a variável indexada por  $n + 1$ , de tal forma que todas as cláusulas tenham três variáveis.

Como finalidade de simplificar o processo da redução, definimos que  $i_1^* = i_2$ ,  $i_2^* = i_3$  e  $i_3^* = i_1$ .

De uma instância  $I = (U, C)$  construiremos um grafo  $G_I = (V, E)$ .

Os vértices  $V$  de  $G_I$  são os seguintes:

Primeiro temos os vértices que representam cada variável da instância em sua forma não negada:

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i, e_{j_i}^i, f_{j_i}^i, g_{j_i}^i, h_{j_i}^i\}$$

Temos então, os vértices que representam as variáveis da instância em sua forma negada:

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} \bigcup_{j \in \bar{J}_i} \{a_j^i, c_j^i, d_j^i, e_j^i, f_j^i, g_j^i, h_j^i, z_j^i, v_j^i, w_j^i\}$$

E, por fim, os vértices de preenchimento, para que cada componente tenha três partes:

$$\cup \bigcup_{1 \leq j \leq m, |c_j|=2} \{a_j^{n+1}, c_j^{n+1}, d_j^{n+1}, e_j^{n+1}, f_j^{n+1}, g_j^{n+1}, h_j^{n+1}\}$$

Juntando as três partes, o conjunto  $V$  de vértices do grafo é dado por:

$$\begin{aligned} V = & \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i, e_{j_i}^i, f_{j_i}^i, g_{j_i}^i, h_{j_i}^i\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} \bigcup_{j \in \bar{J}_i} \{a_j^i, c_j^i, d_j^i, e_j^i, f_j^i, g_j^i, h_j^i, z_j^i, v_j^i, w_j^i\} \\ & \cup \bigcup_{1 \leq j \leq m, |c_j|=2} \{a_j^{n+1}, c_j^{n+1}, d_j^{n+1}, e_j^{n+1}, f_j^{n+1}, g_j^{n+1}, h_j^{n+1}\} \end{aligned}$$

As arestas  $E$  de  $G_I$  são:

Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , as arestas do completo induzido pelo  $K_{12}(j) = \{a_j^i, d_j^i, g_j^i, h_j^i \mid i \in I_j\}$ , - em que  $j$  simboliza o índice da cláusula; as arestas dos conjuntos  $\{c_j^i, d_j^i \mid i \in I_j, i \neq n+1\}$  e  $\{c_j^i, a_j^{i*}, c_j^i, a_j^{i*}, e_j^i, d_j^i, e_j^i, h_j^i, f_j^i, g_j^i, f_j^i, a_j^{i*} \mid i \in I_j\}$ .

Cada cláusula  $c_j$  forma um componente de Teste de Satisfação  $S_j$ , como na Figura 4.1. Note que se tivermos a variável indexada por  $n+1$ , ela não tem a aresta  $cd$ , como podemos ver na comparação na Figura 4.2. Esse componente  $S_j$  tem como objetivo espelhar a satisfação da cláusula  $c_j$ .

As arestas restantes são: para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , para cada  $j \in \bar{J}_i$ , as arestas do grafo completo induzido pelo conjunto  $K_5(j, i) = \{h_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_j^i, h_j^i, g_j^i\}$  - com  $j$  indexando a cláusula e  $i$  indexando a variável; as arestas do conjunto  $\{h_{j_i}^i, w_j^i, w_j^i, h_j^i, g_{j_i}^i, z_j^i, z_j^i, g_j^i, a_{j_i}^i, v_j^i, v_j^i, a_j^i\}$ .

Essas arestas formam o componente de Atribuição de Valores  $T_i$  (Figura 4.3), o qual tem o objetivo de manter a coesão de uma dada variável  $u_i$  entre as cláusulas em que aparece.

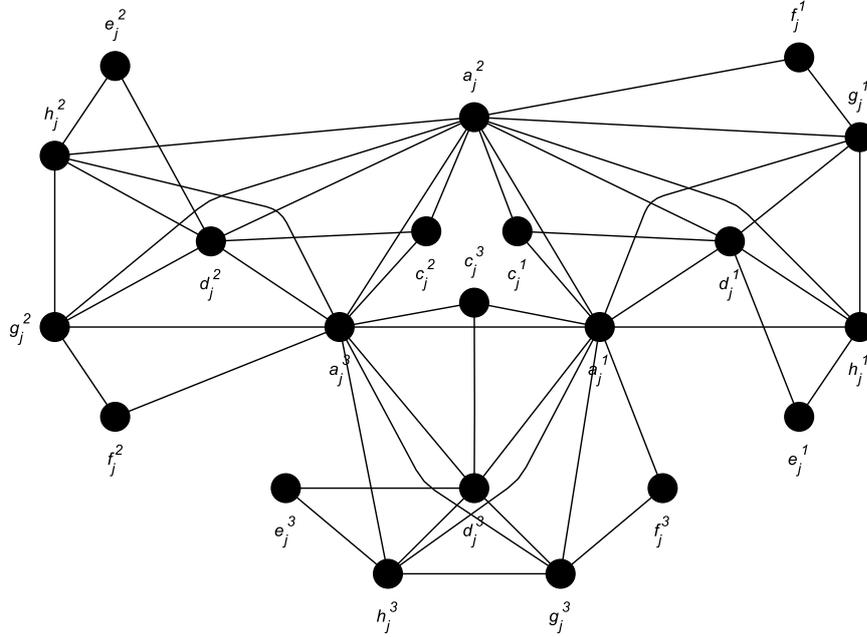


Figura 4.1: Um componente de Teste de Satisfação, representando a cláusula  $j$ , que possui as variáveis 1, 2 e 3.

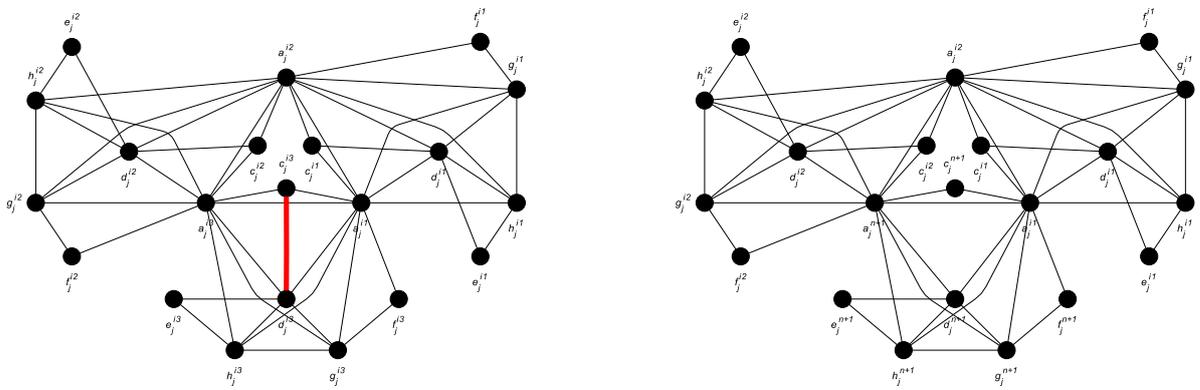


Figura 4.2: Aresta que difere num  $S_j$  com variável indexada por  $n + 1$

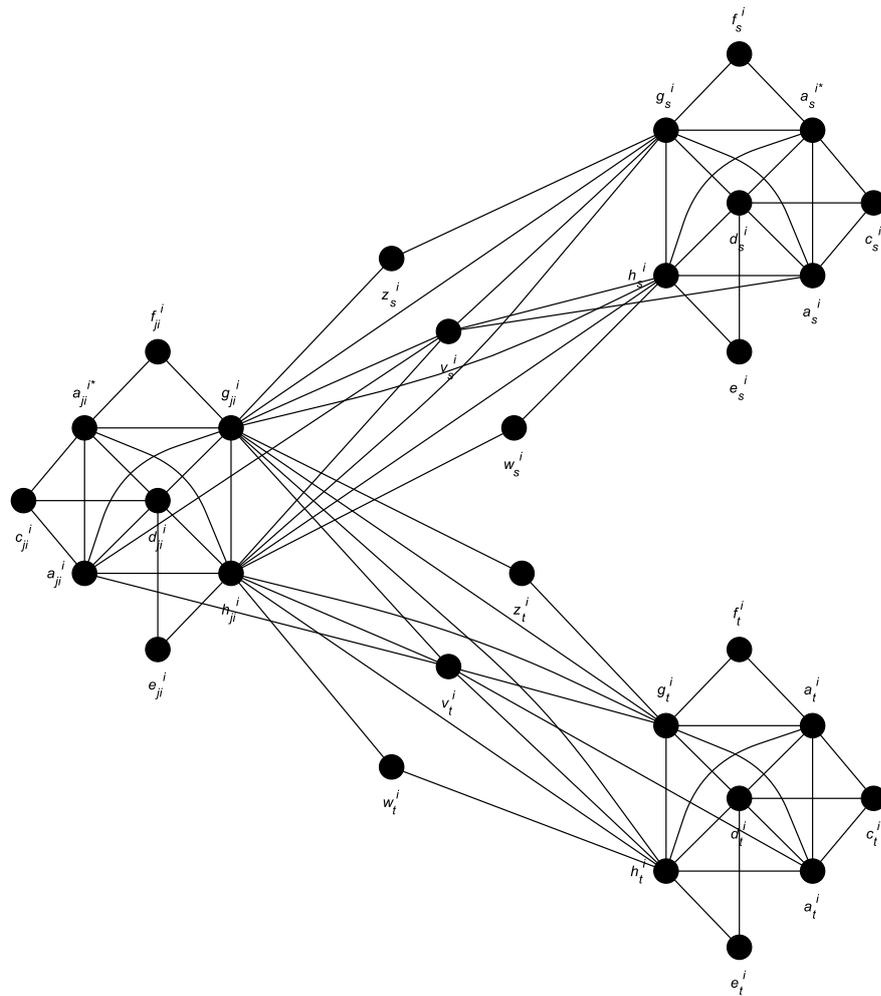


Figura 4.3: Um componente de Atribuição de Valores

De forma resumida, os completos do grafo  $G_I$  são, com parte das arestas omitidas a fim de simplificar as imagens, com os completos possuindo seus vértices em destaque:

- Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , o completo  $K_{12} = \{a_j^i, d_j^i, g_j^i, h_j^i \mid i \in I_j\}$

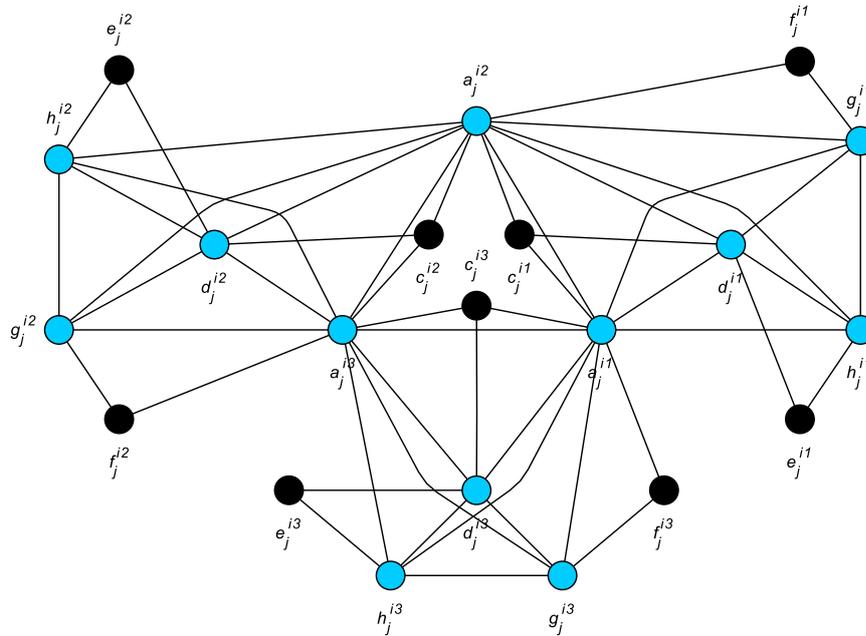


Figura 4.4: Completo  $K_{12}$  em azul

- Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , para cada  $j \in \bar{J}_i$ , o completo  $K_5 = \{h_{ji}^i, g_{ji}^i, v_j^i, h_j^i, g_j^i \mid i \in I_j\}$

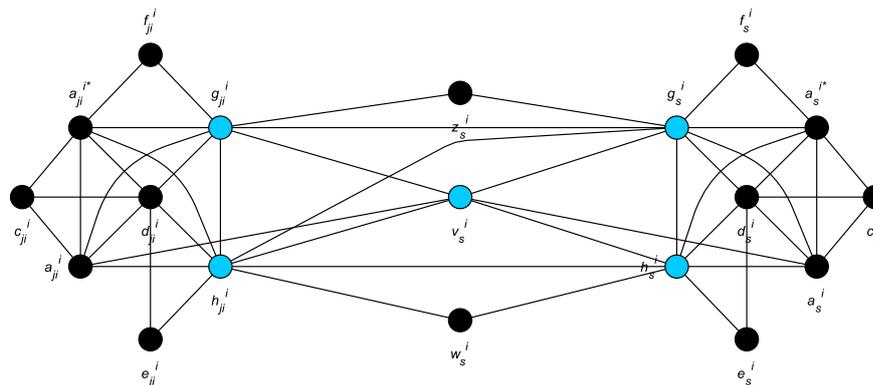


Figura 4.5: Completo  $K_5$  em azul

- Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $i \in I_j$ ,  $i \neq n+1$ , um completo  $K_4$  com  $c_j^i$ :  $\{a_j^i, c_j^i, d_j^i, a_j^{i*}\}$

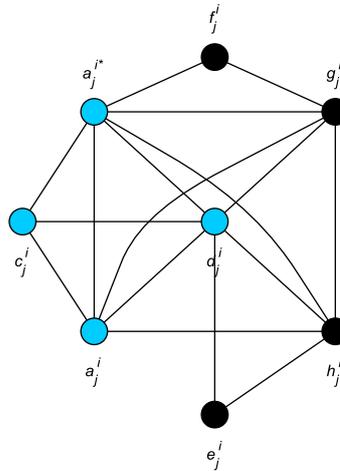


Figura 4.6: Completo  $K_4$  em azul

- Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , para cada  $j \in \bar{J}_i$ , dois completos  $K_4$  com  $v_j^i$ :  $\{a_{ji}^i, h_{ji}^i, g_{ji}^i, v_j^i\}$ ,  $\{a_j^i, h_j^i, g_j^i, v_j^i\}$

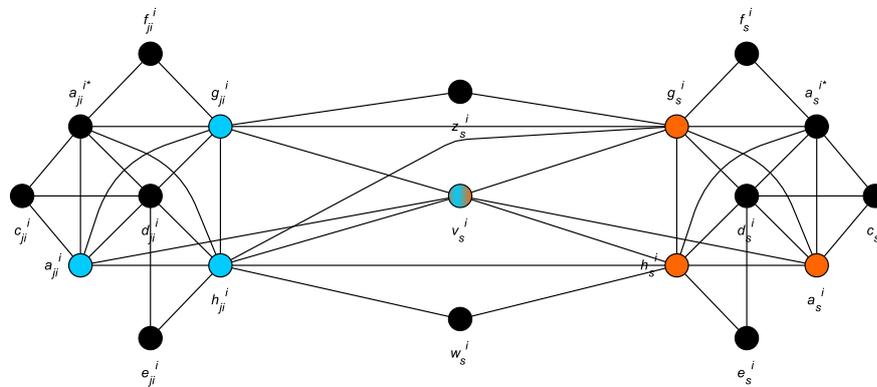


Figura 4.7: Os completo  $K_5$  em azul e laranja, com o vértice em comum  $v_s^i$

- Todos triângulos com vértice de grau 2:
  - Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , para cada  $i \in I_j$ , os triângulos  $\{f_j^i, a_j^{i*}, g_j^i\}$ ,  $\{e_j^i, d_j^i, h_j^i\}$ ; e o triângulo  $\{c_j^{n+1}, a_j^{n+1*}, a_j^{n+1}\}$  quando  $n+1 \in I$ .
  - Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , para cada  $j \in \bar{J}_i$ , os triângulos  $\{g_{ji}^i, z_j^i, g_j^i\}$ ,  $\{h_{ji}^i, w_j^i, h_j^i\}$ .

### 4.2.1 Exemplo de grafo

Na Figura 4.8 temos um grafo obtido a partir da instância do  $3SAT_3$ :  $I = (U, C)$ ,  $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ,  $C = \{c_1 = \{u_1, u_3\}, c_2 = \{\bar{u}_1, u_2, \bar{u}_3\}, c_3 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}\}$

As cláusulas  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  estão à direita, acima e à esquerda, respectivamente. Note a falta das arestas  $c_1^4 d_1^4$  e  $c_3^4 d_3^4$ , uma vez que é a variável para preencher o grafo, aquela indexada por  $n + 1$ . Novamente, algumas arestas foram omitidas, a fim de facilitar a leitura do grafo.

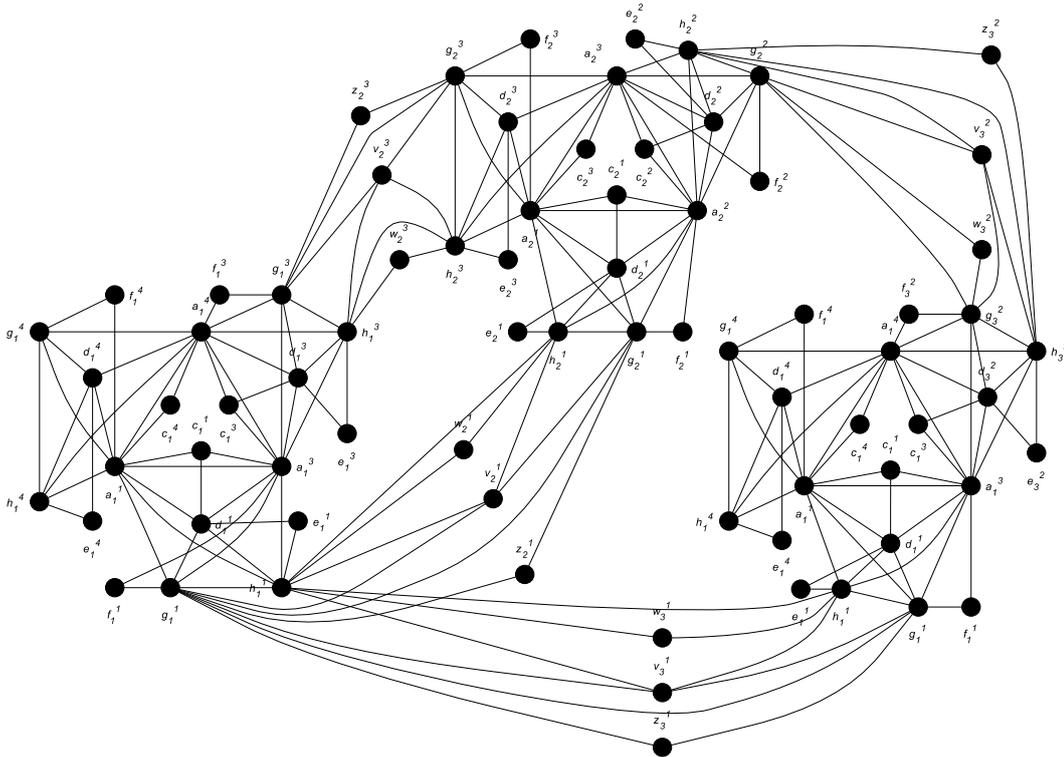


Figura 4.8: Exemplo de grafo obtido através da construção apresentada

Para auxiliar a demonstração principal, iremos apresentar dois lemas que nos ajudam a determinar a valoração que satisfaz o  $3SAT_3$ . O valor de cada  $u \in U$  vai depender de qual membro da Família-RS de  $G_I$  cobre a aresta  $a_{j_i}^i c_{j_i}^i$ .

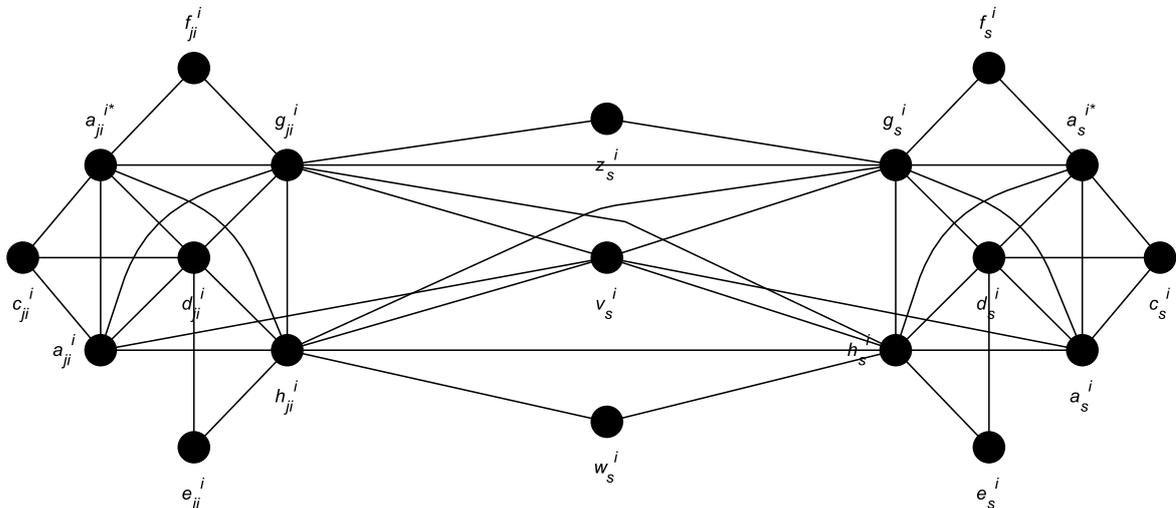


Figura 4.9: Parte de um componente Atribuição de Valores para auxiliar nos lemas

**Lema 4.** *Lema da Escolha de Cobertura.* Seja  $\mathcal{F}$  uma Família-RS do grafo  $G_I$ . Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , e para cada  $i \in I_j$ ,  $i \neq n+1$ , somente um dos triângulos  $\{a_j^i, c_j^i, a_j^{i*}\}$ ,  $\{a_j^i, c_j^i, d_j^i\}$  (Veja a Figura 4.10) pertence a  $\mathcal{F}$ . Se  $i = n+1$ , o vértice  $c_j^{n+1}$  é de grau 2, e, portanto, contido em apenas um triângulo, o triângulo  $\{a_j^{n+1}, c_j^{n+1}, a_j^{(n+1)*}\}$

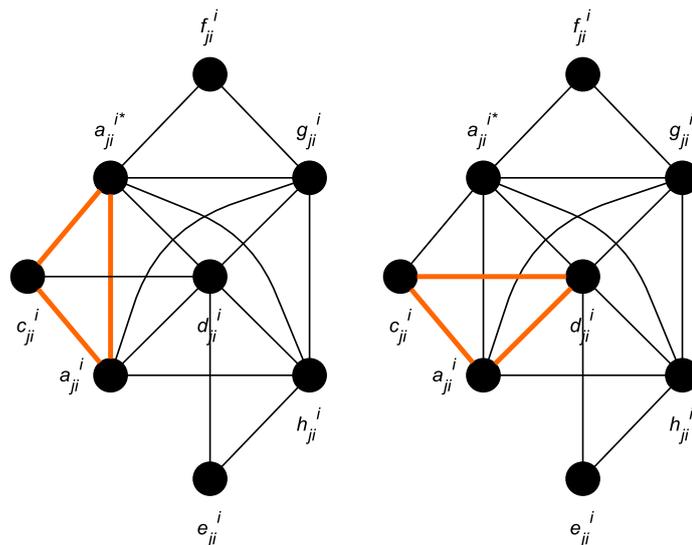


Figura 4.10: Os dois triângulos a serem analisados,  $\{a_j^i, c_j^i, a_j^{i*}\}$  do lado direito e  $\{a_j^i, c_j^i, d_j^i\}$  do lado esquerdo.

*Demonstração.* Considere um  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$  qualquer, e, para cada  $i \in I_j$ ,  $i \neq n+1$ . Presuma sem perda de generalidade que  $j = j_i$ , para o uso do lado esquerdo da Figura 4.9 como auxílio. Da mesma forma, para  $j \in \bar{J}_i$ , utilize o lado direito da Figura 4.9.

Temos que provar que exatamente um dos triângulos  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\}$ ,  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\}$  pertence a  $\mathcal{F}$ .

Perceba que pelo Fato 3, os triângulos  $\{d_{j_i}^i, e_{j_i}^i, h_{j_i}^i\}$  e  $\{a_{j_i}^{i*}, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\}$  pertencem a  $\mathcal{F}$ , pois  $e_{j_i}^i$  e  $f_{j_i}^i$  são vértices de grau 2 de  $G_I$ .

Pelo Fato 2, para cobrir a aresta  $a_{j_i}^i c_{j_i}^i$ , pelo menos um dos três completos tem que pertencer a  $\mathcal{F}$ :

1.  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}, d_{j_i}^i\}$
2.  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\}$
3.  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\}$

Agora vamos mostrar que o completo  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}, d_{j_i}^i\}$  não pertence a  $\mathcal{F}$ .

Pelo Fato 2, para cobrir a aresta  $a_{j_i}^i v_k^i$  pelo menos um dos três completos  $\{a_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_k^i, h_{j_i}^i\}$ ,  $\{a_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_k^i\}$  ou  $\{a_{j_i}^i, h_{j_i}^i, v_k^i\}$  tem que pertencer a  $\mathcal{F}$ . Presuma que  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}, d_{j_i}^i\}$  pertença a  $\mathcal{F}$ , temos que nenhum dos três conjuntos anteriores é membro de  $\mathcal{F}$ , pois as três subfamílias a seguir violam a propriedade Helly:

$$\begin{aligned} & \{\{a_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_k^i, h_{j_i}^i\}, \{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}, d_{j_i}^i\}, \{a_{j_i}^{i*}, f_{j_i}^i, g_{j_i}^i\}\} \\ & \{\{a_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_k^i\}, \{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}, d_{j_i}^i\}, \{a_{j_i}^{i*}, f_{j_i}^i, g_{j_i}^i\}\} \\ & \{\{a_{j_i}^i, h_{j_i}^i, v_k^i\}, \{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}, d_{j_i}^i\}, \{d_{j_i}^i, e_{j_i}^i, h_{j_i}^i\}\} \end{aligned}$$

Desta forma, o completo  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}, d_{j_i}^i\}$  não pertence a  $\mathcal{F}$ .

Por fim, precisamos mostrar que apenas um dos triângulos  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\}$ ,  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\}$  pertence a  $\mathcal{F}$ .

Novamente, considere a aresta  $a_{j_i}^i v_k^i$ ; a presença dos triângulos:  $\{a_{j_i}^{i*}, f_{j_i}^i, g_{j_i}^i\}$ ,  $\{d_{j_i}^i, e_{j_i}^i, h_{j_i}^i\}$ ,  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\}$ ,  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\}$  juntos em  $\mathcal{F}$  implica que nenhum dos três conjuntos completos que possam cobrir a aresta  $a_{j_i}^i v_k^i$  é um membro de  $\mathcal{F}$ , pois as seguintes subfamílias ferem a propriedade Helly:

$$\begin{aligned} & \{\{a_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_k^i, h_{j_i}^i\}, \{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\}, \{a_{j_i}^{i*}, f_{j_i}^i, g_{j_i}^i\}\} \\ & \{\{a_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_k^i\}, \{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\}, \{a_{j_i}^{i*}, f_{j_i}^i, g_{j_i}^i\}\} \\ & \{\{a_{j_i}^i, h_{j_i}^i, v_k^i\}, \{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\}, \{d_{j_i}^i, e_{j_i}^i, h_{j_i}^i\}\} \end{aligned}$$

Desta forma apenas um dos triângulos  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\}$ ,  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\}$  pertence a  $\mathcal{F}$ . □

**Lema 5.** *Lema de Comunicação de Literais.* Seja  $\mathcal{F}$  uma Família-RS do grafo  $G_I$ .

Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  e para cada  $j$ ,  $j \in \bar{J}_i$ , se  $\{a_j^i, c_j^i, d_j^i\} \in \mathcal{F}$ , então  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\} \in \mathcal{F}$  (Figura 4.11). E, se  $\{a_j^i, c_j^i, a_{j_i}^{i*}\} \in \mathcal{F}$ , então  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\} \in \mathcal{F}$  (Figura 4.12).

*Demonstração.* Observe a Figura 4.11. Considere  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  e  $j \in \bar{J}_i$ . Primeiro presuma que  $\{a_j^i, c_j^i, d_j^i\} \in \mathcal{F}$ , na Figura 4.11 esse triângulo é escolhido.

Perceba que pelo Fato 3, os triângulos destacados na Figura 4.11 pertencem à  $\mathcal{F}$ , uma vez que são triângulos com vértices de grau 2.

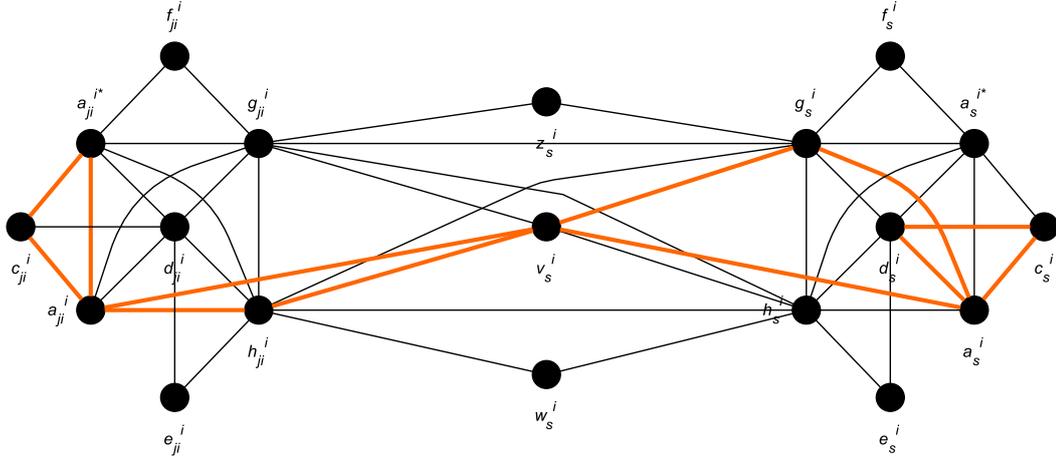


Figura 4.11: Primeiro caso do Lema de Comunicação de Literais

Como no Lema anterior, para cobrir a aresta  $a_j^i v_j^i$ , o conjunto completo  $\{a_j^i, g_j^i, v_j^i\}$  precisa estar em  $\mathcal{F}$ , pois as seguintes subfamílias não tem a propriedade Helly:

$$\{\{a_j^i, g_j^i, v_j^i, h_j^i\}, \{a_j^i, c_j^i, d_j^i\}, \{d_j^i, e_j^i, h_j^i\}\}$$

$$\{\{a_j^i, h_j^i, v_j^i\}, \{a_j^i, c_j^i, d_j^i\}, \{d_j^i, e_j^i, h_j^i\}\}$$

Da mesma forma, para cobrir a aresta  $a_{j_i}^i v_{j_i}^i$ , o conjunto completo  $\{a_{j_i}^i, h_{j_i}^i, v_{j_i}^i\}$  precisa estar em  $\mathcal{F}$ , pois as duas subfamílias a seguir ferem a propriedade Helly:

$$\{\{a_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_{j_i}^i, h_{j_i}^i\}, \{a_j^i, g_j^i, v_j^i\}, \{g_{j_i}^i, g_j^i, z_j^i\}\}$$

$$\{\{a_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_{j_i}^i\}, \{a_j^i, g_j^i, v_j^i\}, \{g_{j_i}^i, g_j^i, z_j^i\}\}$$

Por enquanto a suposição de que  $\{a_j^i, c_j^i, d_j^i\} \in \mathcal{F}$ , forçou os triângulos  $\{a_j^i, g_j^i, v_j^i\}$  e  $\{a_{j_i}^i, h_{j_i}^i, v_{j_i}^i\}$  a estarem em  $\mathcal{F}$ .

Agora observe o lado esquerdo da Figura 4.11. Pelo Lema da Escolha de Cobertura, nós sabemos que somente  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\}$  ou  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\}$  pertence a  $\mathcal{F}$ .

Uma vez que a suposição que  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\}$  pertence a  $\mathcal{F}$  implica na subfamília  $\{\{a_j^i, h_j^i, v_j^i\}, \{a_j^i, c_j^i, d_j^i\}, \{d_j^i, e_j^i, h_j^i\}\}$  que viola a propriedade Helly, concluímos que  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\}$  pertence a  $\mathcal{F}$ .

A segunda parte segue um argumento análogo, mas com a Figura 4.12 como a base. Começamos supondo que  $\{a_j^i, c_j^i, a_j^{i*}\}$  pertence a  $\mathcal{F}$ , um triângulo escolhido no lado direito da Figura 4.12, por consequência, os outro três triângulos:  $\{a_j^i, h_j^i, v_j^i\}$ ,  $\{a_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_{j_i}^i\}$  e  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\}$  estão em  $\mathcal{F}$ .  $\square$

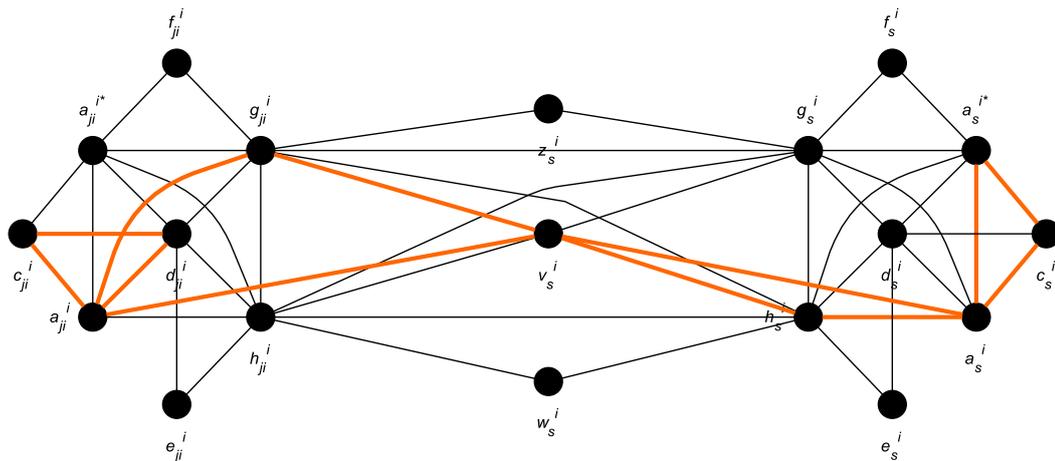


Figura 4.12: Segundo caso

#### 4.2.2 Conclusão

O Lema da Escolha de Cobertura define qual triângulo utilizar para cobrir a aresta  $a_{j_i}^i, c_{j_i}^i$ .

O Lema de Comunicação de Literais implica que se  $c_p$  e  $c_q$  são cláusulas nas quais a variável  $u_i$  ocorre como literais diferentes, então a Família-RS é forçada a escolher triângulos diferentes para cobrir as arestas  $a_p^i, c_p^i$  e  $a_q^i, c_q^i$ . E, da mesma forma, se  $c_p$  e  $c_q$  têm  $u_i$  com o mesmo literal, então as arestas  $a_p^i, c_p^i$  e  $a_q^i, c_q^i$  são cobertas pelo mesmo tipo de triângulo.

Deste jeito, o Lema da Escolha de Cobertura define a valoração de uma variável  $u_i$ , enquanto o Lema de Comunicação de Literais mantém a coesão entre as ocorrências de  $u_i$  em cada cláusulas em que aparece.

#### 4.3 NP-COMPLETUDE

Apresentamos um esquema da demonstração: primeiro, suponha que o grafo  $G_I$  é grafo clique e, com isso, mostre uma valoração para  $U$  que satisfaz  $C$ . Para a conclusão da demonstração, é dada uma valoração de  $U$  que satisfaz  $C$  e, então, é listada uma cobertura por completos  $\mathcal{F}$  de  $G_I$  que tem a propriedade Helly.

Dada uma instância qualquer  $I = (U, C)$  do  $3SAT_3$ , seja  $G_I$  o grafo obtido pelo processo descrito na seção 4.2.  $G$  é um Grafo Clique se e somente se  $C$  é satisfazível.

Primeiro, suponha que  $G_i$  é um Grafo Clique e seja  $\mathcal{F}$  é uma Família-RS de  $G_I$ . Mostraremos uma atribuição de  $U$  que satisfaz  $C$ :

Para cada variável  $u_i \in U$  atribua:

$$u_i \text{ como verdadeiro se e somente se } \{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\} \in \mathcal{F}.$$

Para observar que essa atribuição de valores satisfaz  $C$ , considere a cláusula  $c_j$ .

Veja a Figura 4.1. A propriedade Helly de  $\mathcal{F}$  implica que existe  $i \in I_j$  tal que o triângulo  $\{a_j^i, c_j^i, a_j^{i*}\} \notin \mathcal{F}$ , perceba que  $i \neq n+1$ , pois  $c_j^{n+1}$  é um vértice de grau 2 em  $G_I$ . Pelo Lema da Escolha de Cobertura,  $\{a_j^i, c_j^i, d_j^i\}$  está em  $\mathcal{F}$ . Existem duas possibilidades:

- $u_i$  é o literal  $u_i$  em  $c_j$ : então  $j = j_i$  e a condição (2)  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\} \in \mathcal{F}$ . Então, por (1) a variável  $c_i$  é verdadeira e a cláusula  $c_j$  é satisfeita.
- $u_i$  é o literal  $\bar{u}_i$  em  $c_j$ . Então  $j \in \bar{J}$ . Pela condição (2) e o Lema de Comunicação de Literais,  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\} \in \mathcal{F}$ . Então, pelo Lema da Escolha de Cobertura,  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\} \notin \mathcal{F}$ , portanto  $u_i$  é falso e a cláusula  $c_j$  é satisfeita.

Logo se  $G_I$  é um grafo clique, então  $C$  é satisfeito.

Agora, por outro lado, dada uma atribuição de  $U$  que satisfaz  $C$ , existe uma cobertura por completos  $\mathcal{F}$  de  $G_I$ :

- Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , o completo  $K_{12} = \{a_j^i, d_j^i, g_j^i, h_j^i \mid i \in I_j\}$
- Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , para cada  $i \in I_j$ , os triângulos  $\{f_j^i, a_j^{i*}, g_j^i\}, \{e_j^i, d_j^i, h_j^i\}$
- Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , para cada  $i \in I_j, i \neq n+1$ ,  $\{a_j^i, c_j^i, d_j^i\}$  e para  $i = n+1$ ,  $\{a_j^i, c_j^i, a_j^{i*}\}$
- Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , para cada  $j \in \bar{J}$  o completo  $K_5 = \{h_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_j^i, h_j^i, g_j^i\}$
- Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , para cada  $j \in \bar{J}$  os triângulos  $\{g_{j_i}^i, z_{j_i}^i, g_{j_i}^i\}, \{h_{j_i}^i, w_{j_i}^i, h_{j_i}^i\}$
- Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tal que a variável  $u_i$  tem valoração verdadeira,  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, d_{j_i}^i\}$
- Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tal que a variável  $u_i$  tem valoração falsa,  $\{a_{j_i}^i, c_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\}$

Além dessas arestas listadas, que aparecem em todas coberturas., temos aquelas cobertas pelos triângulos escolhidos pelo Lema da Escolha de Cobertura e pelo Lema de Comunicação de Literais. Com a adição desses triângulos ao conjunto de completos, todas as arestas são cobertas.

Por fim, temos que mostrar que o conjunto  $\mathcal{F}$  tem a propriedade Helly. Pela generalização de Alcón e Gutierrez, é necessário mostrar que para cada triângulo  $T$  de  $G_I$ , os completos que têm uma aresta em comum têm intersecção não-nula, ou seja, para cada  $T \in T(G)$ ,  $\bigcap \mathcal{F}_T \neq \emptyset$ . Isso é possível pois as arestas do grafo construído sempre pertencem a um triângulo.

Defina um *triângulo fácil* como: se um triângulo contém uma aresta  $e$ , então qualquer completo de  $\mathcal{F}$  que cubra  $e$  também contém  $T$ , então a intersecção de  $\mathcal{F}_T$  é não-nula. Triângulos que contêm um vértice de grau 2 são fáceis, pois é necessário incluí-los na cobertura, senão a propriedade Helly é ferida.

Os triângulos de  $G_I$  são analisados em dois grupos, se estão ou não contidos em um  $K_{12}$  ou em um  $K_5$ .

#### 4.3.1 Triângulos nem em um $K_{12}$ ou em um $K_5$

Esses triângulos são separados em quatro grupos:

- a) Triângulos com o vértice  $c_j^i$ ,  $1 \leq j \leq m, i \in I_j, i \neq n+1$ . Esse vértice é contido em exatamente três triângulos de  $G_i$  (Figura 4.13).  $\{c_j^i, a_j^i, a_j^{i*}\}$ ,  $\{c_j^i, a_j^i, d_j^i\}$ ,  $\{c_j^i, a_j^{i*}, d_j^i\}$ .

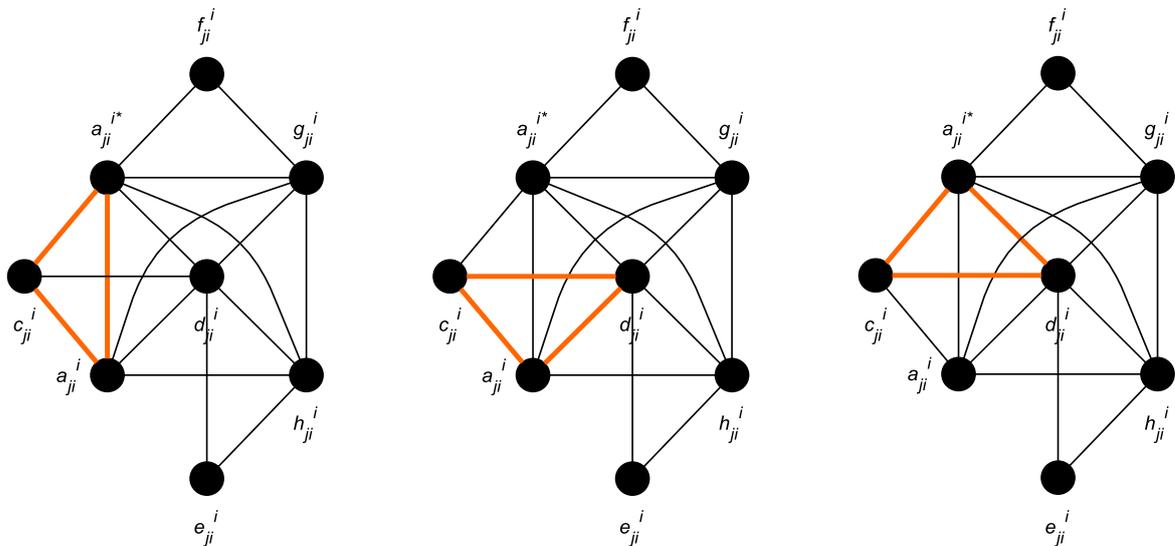


Figura 4.13: Triângulos que contêm  $c_j^i$

Para qualquer um destes três tipos de triângulos, os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

Se  $u_i$  é verdadeiro e ocorre como literal  $u_i$  em  $c_j$  ou  $u_i$  é falso e ocorre como o literal  $\bar{u}_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), \{c_j^i, a_j^{i*}, d_j^i\}, \{a_j^i, c_j^i, d_j^i\}$$

Logo  $d_j^i \in \cap \mathcal{F}_T$ .

Se  $u_i$  é verdadeiro e ocorre como literal  $\bar{u}_i$  em  $c_j$  ou  $u_i$  é falso e ocorre como o literal  $u_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), \{c_j^i, a_j^{i*}, d_j^i\}, \{a_j^i, c_j^i, a_j^{i*}\}$$

Logo  $a_j^{i*} \in \cap \mathcal{F}_T$ .

- b) Triângulos com o vértice  $c_j^{n+1}$ ,  $1 \leq j \leq m, n+1 \in I_j$ :

$$\{a_j^{n+1}, c_j^{n+1}, a_j^{(n+1)*}\}$$

São todos triângulos fáceis (4.14).

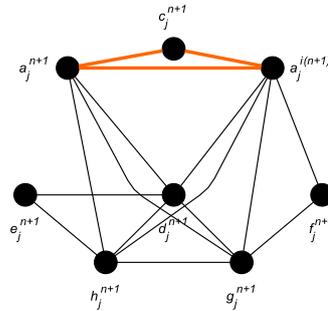


Figura 4.14: Triângulos que não têm aresta  $c_j^i d_j^i$

- c) Triângulos com algum dos vértices:  $e_j^i$  ou  $f_j^i$  ou  $w_j^i$  ou  $z_j^i$  (Figura 4.15),  $1 \leq j \leq m, i \in I_j$

$$\{e_j^i, d_j^i, h_j^i\}, \{f_j^i, g_j^i, a_j^{i*}\}, \{w_j^i, h_{j_i}^i, h_j^i\}, \{z_j^i, g_{j_i}^i, g_j^i\}$$

São todos triângulos fáceis.

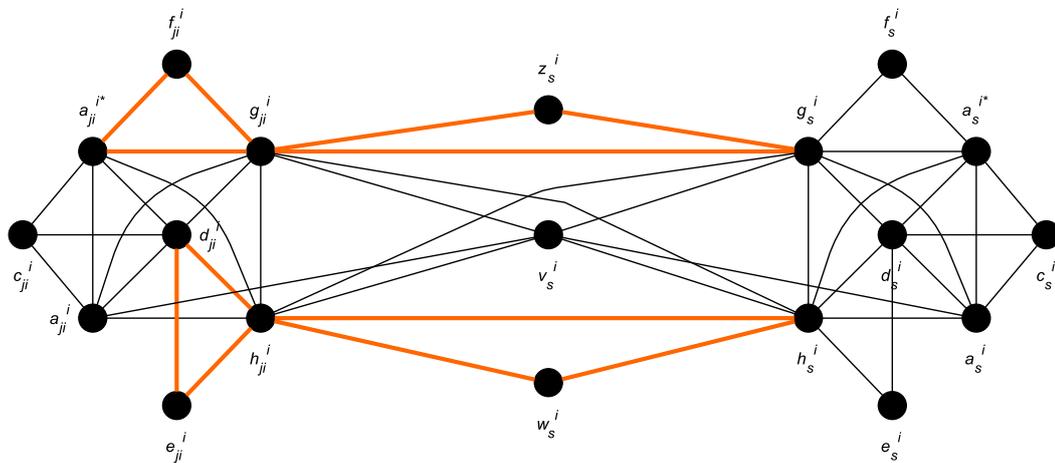


Figura 4.15: Triângulos que com vértice  $e_j^i$  ou  $f_j^i$  ou  $w_j^i$  ou  $z_j^i$

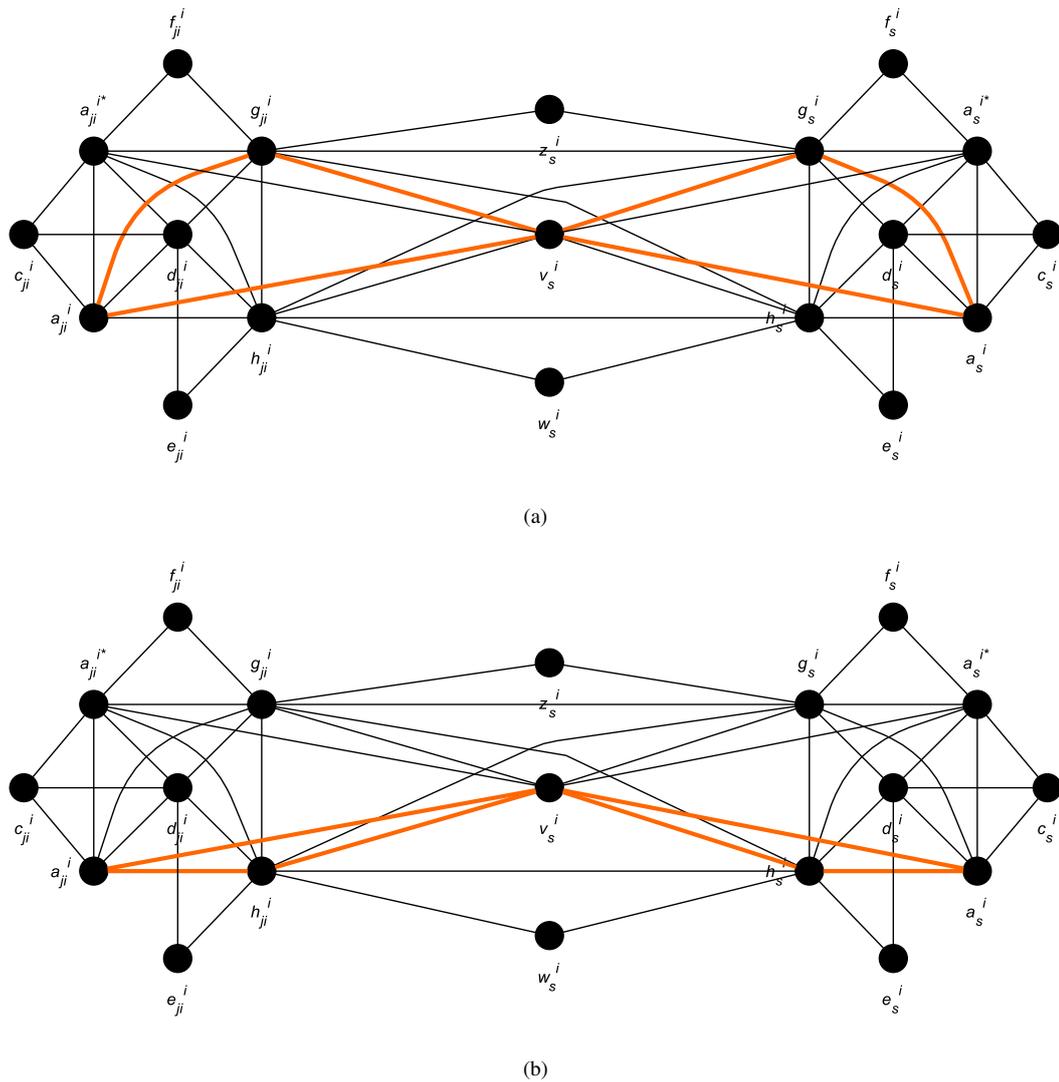


Figura 4.16: Triângulos que contêm o vértice  $v_j^i$

- d) Triângulos com o vértice  $v_j^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $j \in \bar{J}_i$  (veja a Figura 4.16).

$$\{v_j^i, g_{j_i}^i, a_{j_i}^i\}, \{v_j^i, h_{j_i}^i, a_{j_i}^i\}, \{v_j^i, g_{j_i}^i, a_{j_i}^i\}, \{v_j^i, h_{j_i}^i, a_{j_i}^i\}$$

$$- T = \{v_j^i, g_{j_i}^i, a_{j_i}^i\}$$

Se  $u_i$  é verdadeiro, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_{12}(j_i), K_5(j, i), \{a_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_k^i\}$  quando  $k \in \bar{J}_i$ . Portanto  $g_{j_i}^i \in \mathcal{F}_T$ . Se  $u_i$  é falso, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_{12}(j_i), K_5(j, i), \{a_{j_i}^i, h_{j_i}^i, v_j^i\}$ . Logo  $h_{j_i}^i \in \mathcal{F}_T$

$$- T = \{v_j^i, h_{j_i}^i, a_{j_i}^{i*}\}$$

Se  $u_i$  é verdadeiro, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_{12}(j_i), K_5(j, i), \{a_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_j^i\}$ . Portanto  $g_{j_i}^i \in \mathcal{F}_T$ . Se  $u_i$  é falso, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_{12}(j_i), K_5(j, i), \{a_{j_i}^i, h_{j_i}^i, v_k^i\}$  quando  $k \in \bar{J}_i$ . Logo  $h_{j_i}^i \in \mathcal{F}_T$

$$- T = \{v_j^i, g_{j_i}^i, a_j^i\}$$

Se  $u_i$  é verdadeiro, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_{12}(j), K_5(j, i), \{v_j^i, h_j^i, a_j^i\}$ .

Portanto  $h_{j_i}^i \in \mathcal{F}_T$ . Se  $u_i$  é falso, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_{12}(j), K_5(j, i)$ .

Logo  $g_j^i \in \mathcal{F}_T$

$$- T = \{v_j^i, h_{j_i}^i, a_j^i\}$$

Se  $u_i$  é verdadeiro, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_{12}(j), K_5(j, i)$ . Portanto

$h_{j_i}^i \in \mathcal{F}_T$ . Se  $u_i$  é falso, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_{12}(j), K_5(j, i), \{v_j^i, g_j^i, a_j^i\}$ .

Logo  $g_j^i \in \mathcal{F}_T$

#### 4.3.2 Triângulos em um $K_{12}$ ou em um $K_5$

Agora considere os triângulos de  $G$  contidos em um  $K_{12}$  ou um  $K_5$ :

- a) Veremos os triângulos contidos em um  $K_{12}(j) = \{a_j^i, d_j^i, g_j^i, h_j^i \mid i \in I_j\}, 1 \leq j \leq m$ . Entre estes triângulos, aqueles com pelo menos uma aresta coberta pelo  $K_{12}$  são triângulos fáceis.

O restante dos triângulos são triângulos cujas arestas são cobertas pelo  $K_{12}$  e outro completo de  $\mathcal{F}$ . Estas arestas são as seguintes, para  $i \neq n + 1$ :

$$a_j^i a_j^{i*}, a_j^i d_j^i, a_j^i g_j^i, a_j^i h_j^i, a_j^{i*} d_j^i, a_j^{i*} g_j^i, h_j^i d_j^i, h_j^i g_j^i$$

E, para  $i = n + 1$ , as seguintes arestas:

$$a_j^i a_j^{i*}, a_j^{i*} g_j^i, h_j^i d_j^i$$

$$- T = \{a_j^i, i \in I_j\} \text{ (Figura 4.17)}$$

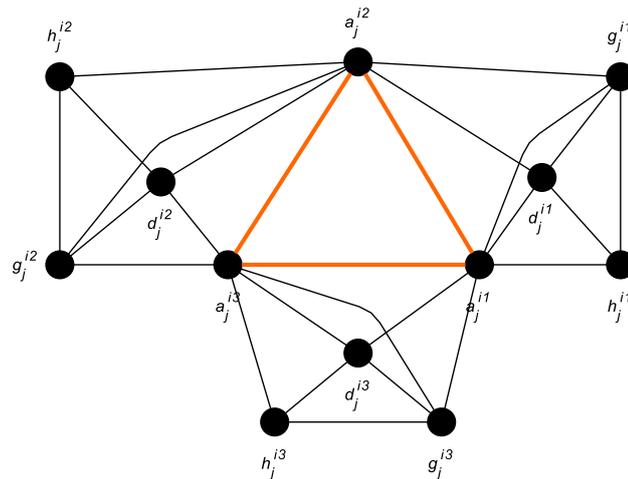


Figura 4.17: Triângulos formados por  $a_j^i$

Uma vez que  $c_j$  é satisfeito, então existe  $i \in I_j$  de tal forma que  $u_i$  ocorre como o literal  $u_i$  em  $c_j$  e a variável  $u_i$  é verdadeiro ou  $u_i$  ocorre como o literal  $\bar{u}_i$  e a variável  $u_i$  é falsa.

Em qualquer caso, pela construção de  $\mathcal{F}$ ,  $a_j^i a_j^{i*}$  é coberto apenas por  $K_{12}(j)$ .

Como  $K_{12}(j)$  também contém o terceiro vértice de  $T$ ,  $T$  é um triângulo fácil.

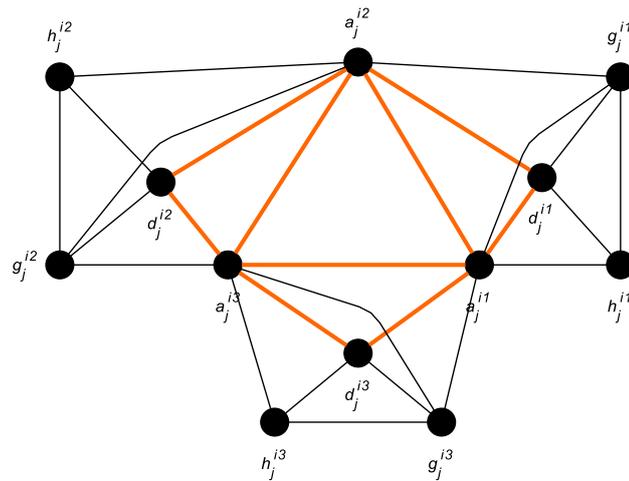


Figura 4.18: Triângulos formados por  $\{a_j^i, a_j^{i*}, d_j^i\}$

–  $T = \{\{a_j^i, a_j^{i*}, d_j^i\} \in I_j\}, i \neq n + 1$  (Figura 4.18)

Se  $u_i$  é verdadeiro e ocorre como literal  $u_i$  em  $c_j$  ou  $u_i$  é falso e ocorre como literal  $\bar{u}_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), \{c_j^i, a_j^{i*}, d_j^i\}, \{a_j^i, c_j^i, d_j^i\}. \text{ Portanto } d_j^i \in \bigcap \mathcal{F}_T$$

Se  $u_i$  é verdadeiro e ocorre como literal  $\bar{u}_i$  em  $c_j$  ou  $u_i$  é falso e ocorre como literal  $u_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), \{c_j^i, a_j^{i*}, d_j^i\}, \{a_j^i, c_j^i, a_j^{i*}\}. \text{ Portanto } a_j^{i*} \in \bigcap \mathcal{F}_T$$

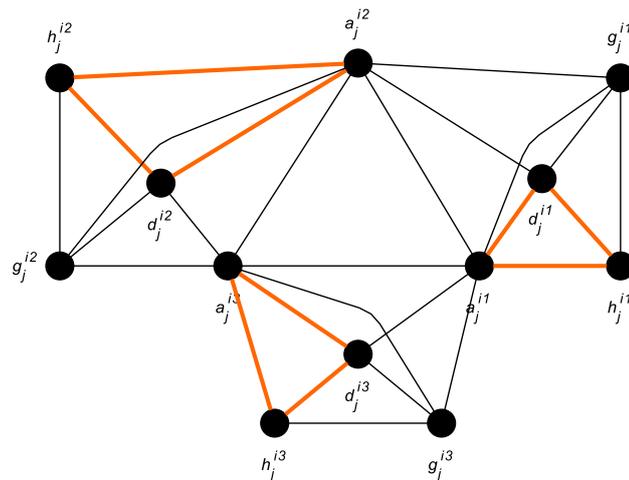


Figura 4.19: Triângulos formados por  $\{a_j^i, d_j^i, h_j^i\}$

–  $T = \{\{a_j^i, d_j^i, h_j^i\} \in I_j\}, i \neq n + 1$  (Figura 4.19)

Se  $u_i$  é verdadeiro e ocorre como literal  $u_i$  em  $c_j$  ou  $u_i$  é falso e ocorre como literal  $\bar{u}_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), \{e_j^i, h_j^i, d_j^i\}, \{a_j^i, c_j^i, d_j^i\}. \text{ Portanto } d_j^i \in \bigcap \mathcal{F}_T$$

Se  $u_i$  é verdadeiro e ocorre como literal  $\bar{u}_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), \{e_j^i, h_j^i, d_j^i\}, \{a_j^i, h_j^i, v_j^i\}. \text{ Portanto } h_j^i \in \bigcap \mathcal{F}_T$$

Se  $u_i$  é falso e ocorre como literal  $u_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), \{e_j^i, h_j^i, d_j^i\}, \{a_j^i, h_j^i, v_k^i\}, k \in \bar{J}_i$$

Com a lista da cobertura por completos apresentada,  $h_j^i \in \bigcap \mathcal{F}_T$

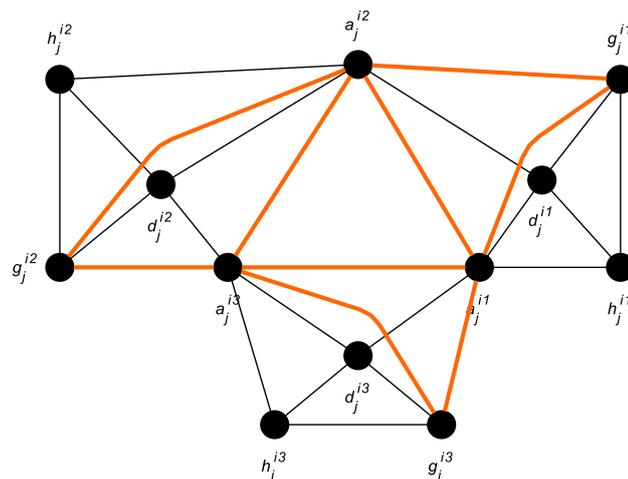


Figura 4.20: Triângulos formados por  $\{a_j^i, a_j^{i*}, g_j^i\}$

- $T = \{\{a_j^i, a_j^{i*}, g_j^i\} \in I_j, i \neq n + 1\}$  (Figura 4.20)

Se  $u_i$  é verdadeiro e ocorre como literal  $u_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), \{a_j^{i*}, f_j^i, g_j^i\}, \{a_j^i, g_j^i, v_k^i\}, k \in \bar{J}_i. \text{ Portanto } g_j^i \in \bigcap \mathcal{F}_T$$

Se  $u_i$  é verdadeiro e ocorre como literal  $\bar{u}_i$  em  $c_j$  ou  $u_i$  é falso e ocorre como literal  $u_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), \{a_j^{i*}, f_j^i, g_j^i\}, \{a_j^{i*}, a_j^i, c_j^i\}. \text{ Portanto } a_j^{i*} \in \bigcap \mathcal{F}_T$$

Se  $u_i$  é falso e ocorre como literal  $u_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), \{a_j^{i*}, f_j^i, g_j^i\}, \{a_j^i, g_j^i, v_j^i\}, k \in \bar{J}_i. \text{ Portanto } g_j^i \in \bigcap \mathcal{F}_T$$

- $T = \{\{a_j^i, g_j^i, h_j^i\} \in I_j, i \neq n + 1\}$  (Figura 4.21)

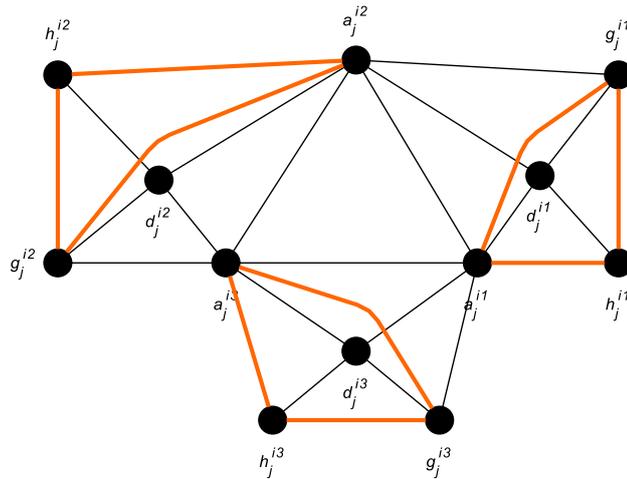


Figura 4.21: Triângulos formados por  $\{a_j^i, g_j^i, h_j^i\}$

Se  $u_i$  é verdadeiro e ocorre como literal  $u_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), K_5(j, i), \{a_j^i, g_j^i, v_k^i\}, k \in \bar{J}_i. \text{ Portanto } g_j^i \in \bigcap \mathcal{F}_T$$

Se  $u_i$  é falso e ocorre como literal  $u_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), K_5(j, i), \{a_j^i, h_j^i, v_k^i\}, k \in \bar{J}_i. \text{ Portanto } h_j^i \in \bigcap \mathcal{F}_T$$

Se  $u_i$  é verdadeiro e ocorre como literal  $\bar{u}_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), K_5(j, i), \{a_j^i, h_j^i, v_j^i\}. \text{ Portanto } h_j^i \in \bigcap \mathcal{F}_T$$

Se  $u_i$  é falso e ocorre como literal  $\bar{u}_i$  em  $c_j$ , os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:

$$K_{12}(j), K_5(j, i), \{a_j^i, g_j^i, v_j^i\}. \text{ Portanto } g_j^i \in \bigcap \mathcal{F}_T$$

- b) Por fim, considere os triângulos de que estão contidos em um  $K_5(j, i) = \{h_{j_i}^i, g_{j_i}^i, v_j^i, h_j^i, g_j^i\}$  para cada  $1 \leq i \leq n$  e  $j \in \bar{J}_i$ .

Dentre esses triângulos, aqueles com pelo menos uma aresta coberto por  $K_5(j, j)$  são triângulos fáceis. Perceba que as arestas  $g_{j_i}^i h_j^i$  e  $h_{j_i}^i g_j^i$  são cobertas apenas por  $K_5(j, i)$ , o que implica que os seis triângulos formados por uma destas duas arestas e um vértice adicional de  $K_5(j, i)$  são todos fáceis.

Toda aresta dos quatro triângulos restantes é coberta por um completo além de  $K_5(j, i)$ . Note que estas arestas são:

$$g_{j_i}^i g_j^i, g_{j_i}^i v_j^i, g_{j_i}^i h_{j_i}^i, h_j^i v_j^i, h_j^i g_j^i, h_j^i h_{j_i}^i, v_j^i h_{j_i}^i, v_j^i g_j^i$$

Desta forma, iremos mostrar os quatro tipos de triângulos contidos em  $K_5(j, i)$ :

$$- T = \{g_{j_i}^i, g_j^i, v_j^i\} \text{ (Figura 4.22)}$$

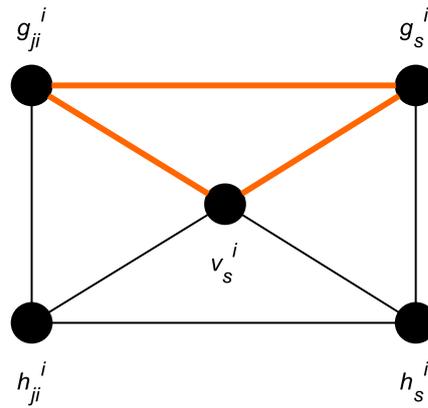


Figura 4.22: Triângulo formado por  $\{g_{ji}^i, g_j^i, v_j^i\}$

Se  $u_i$  é verdadeiro, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_5(j, i), \{g_{ji}^i, g_j^i, z_j^i\}, \{a_{ji}^i, g_{ji}^i, v_j^i\}$ .  
Portanto  $g_{ji}^i \in \cap \mathcal{F}_T$ .

Se  $u_i$  é falso, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_5(j, i), \{g_{ji}^i, g_j^i, z_j^i\}, \{a_j^i, g_{ji}^i, v_j^i\}$ .  
Portanto  $g_j^i \in \cap \mathcal{F}_T$

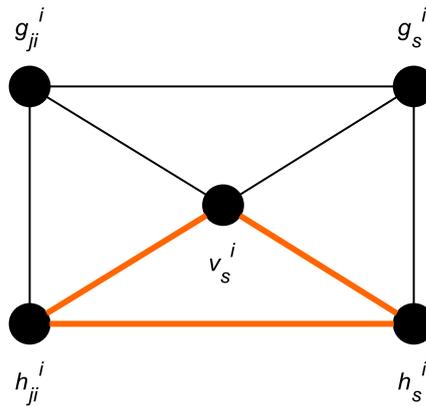


Figura 4.23: Triângulo formado por  $\{h_{ji}^i, h_s^i, v_s^i\}$

–  $T = \{\{h_{ji}^i, h_s^i, v_s^i\}\}$  (Figura 4.23)

Se  $u_i$  é verdadeiro, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_5(j, i), \{h_{ji}^i, g_j^i, w_j^i\}, \{a_j^i, h_j^i, v_j^i\}$ .  
Portanto  $h_j^i \in \cap \mathcal{F}_T$ .

Se  $u_i$  é falso, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_5(j, i), \{h_{ji}^i, h_j^i, w_j^i\}, \{a_{ji}^i, h_{ji}^i, v_j^i\}$ .  
Portanto  $h_{ji}^i \in \cap \mathcal{F}_T$

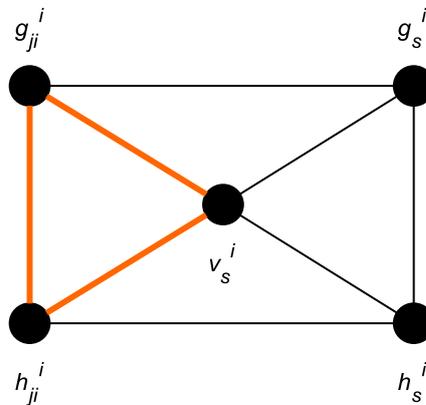


Figura 4.24: Triângulo formado por  $\{g_{ji}^i, h_{ji}^i, v_s^i\}$

–  $T = \{\{g_{ji}^i, h_{ji}^i, v_s^i\}\}$  (Figura 4.24)

Se  $u_i$  é verdadeiro, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_{12}(j), \{a_{ji}^i, g_j^i, v_j^i\}, K_5(k, i), k \in \bar{J}_i$ .  
Portanto  $g_{ji}^i \in \cap \mathcal{F}_T$ .

Se  $u_i$  é falso, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_{12}, \{a_{ji}^i, h_{ji}^i, v_j^i\}, K_5(k, i), k \in \bar{J}_i$ .  
Portanto  $h_{ji}^i \in \cap \mathcal{F}_T$

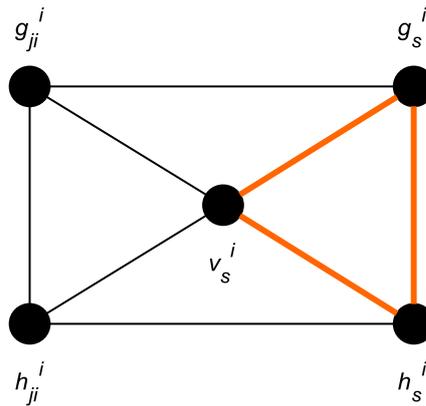


Figura 4.25: Triângulo formado por  $\{g_j^i, h_j^i, v_j^i\}$

–  $T = \{g_j^i, h_j^i, v_j^i\}$  (Figura 4.25)

Se  $u_i$  é verdadeiro, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_{12}, K_5(j, i), \{v_j^i, h_j^i, a_j^i\}$ . Portanto  $h_j^i \in \cap \mathcal{F}_T$ .

Se  $u_i$  é falso, então os membros de  $\mathcal{F}_T$  são:  $K_{12}, K_5(j, i), \{v_j^i, g_j^i, a_j^i\}$ . Portanto  $g_j^i \in \cap \mathcal{F}_T$

Portanto, todos os triângulos  $T$  de  $G_I$  foram analisados, e os completos que têm uma aresta em comum com estes triângulos tem intersecção não-nula, finalizando a demonstração de Alcón et al. (2009).

O fato da intersecção ser não nula cumpre os requisitos da generalização de Alcón e Gutierrez, a qual permite afirmar que a cobertura por completos  $\mathcal{F}$  tem a propriedade Helly, ou seja,  $G_I$  é grafo clique.  $\square$

### 4.3.3 Exemplo de Família-RS a partir das instruções

Utilizaremos a mesma instância do  $3SAT_3$  apresentada na Seção 4.2.1  $I = (U, C)$ ,  $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ,  $C = \{c_1 = \{u_1, u_3\}, c_2 = \{\bar{u}_1, u_2, \bar{u}_3\}, c_3 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}\}$ .

Seguiremos a mesma ordem das seções 4.3.1 e 4.3.2 para descrever o triângulo. Os triângulos incluídos em determinado passo tem a cor azul, enquanto aqueles de passos anteriores tem a cor laranja.

Primeiro, com os triângulos fora dos completos  $K_{12}$  e dos completos  $K_5$ .

Preenchemos primeiro os triângulos referente à valoração das variáveis de  $U$ , como feito na Figura 4.26, utilizando o Lema da Escolha de Cobertura (4).

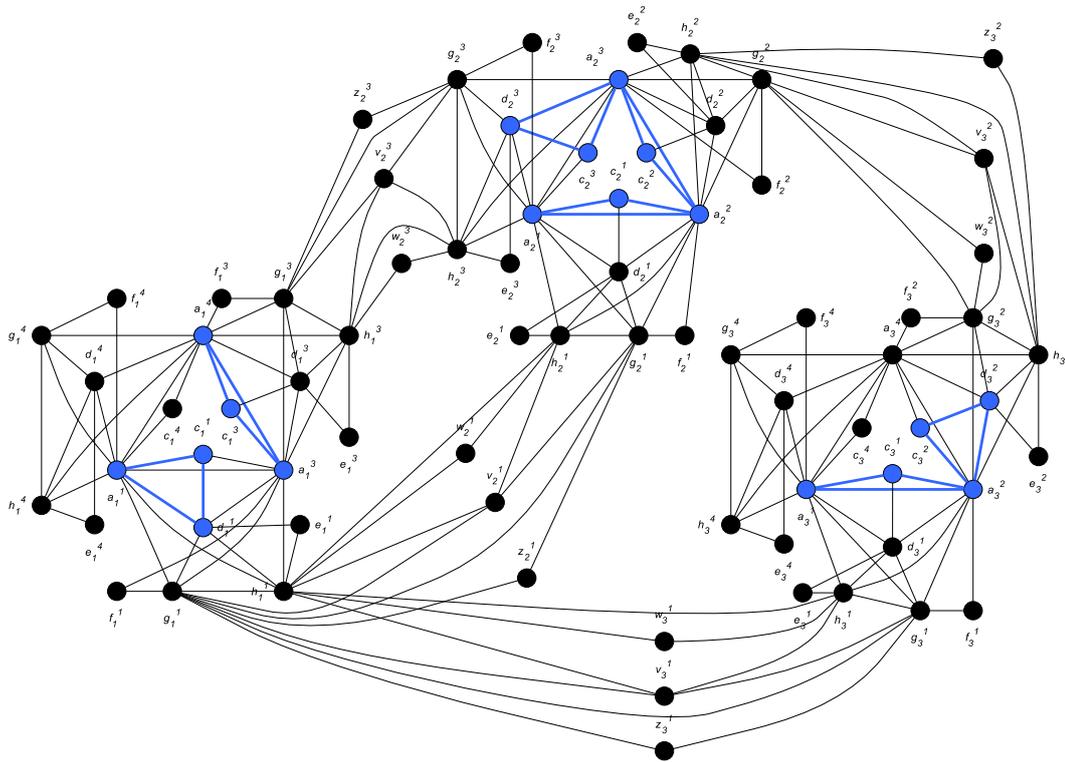


Figura 4.26: Triângulo escolhidos de acordo com o Lema da Escolha de Cobertura em azul

Em seguida, são tomados os triângulos fáceis, aqueles com vértices de grau 2, como podemos observar na Figura 4.27.

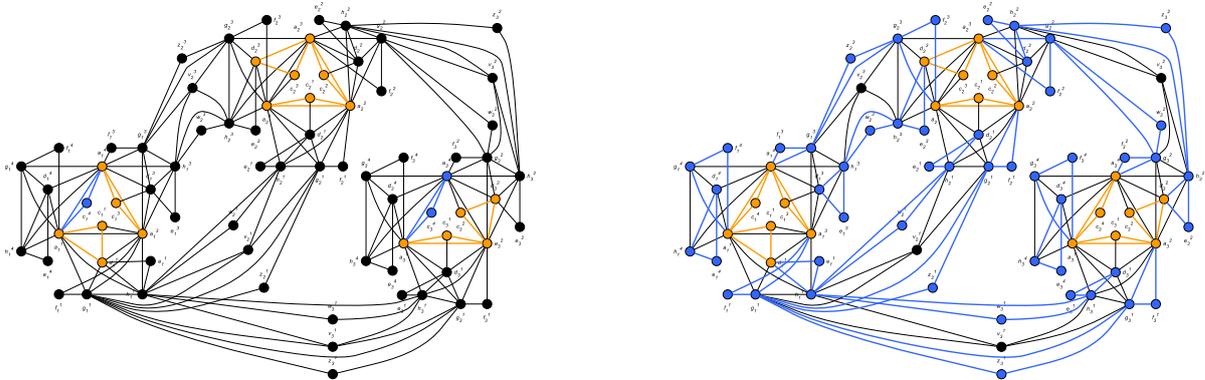


Figura 4.27: Triângulos fáceis fora de um  $K_{12}$  e de um  $K_5$

Para acabar com o triângulos fora dos completos  $K_{12}$  e  $K_5$ , utilizamos o Lema de Comunicação de Literais para decidir qual par de triângulos é usado referente aos vértices  $v_2^1, v_2^3, v_3^1$  e  $v_3^2$ , como colocado na Figura 4.28.

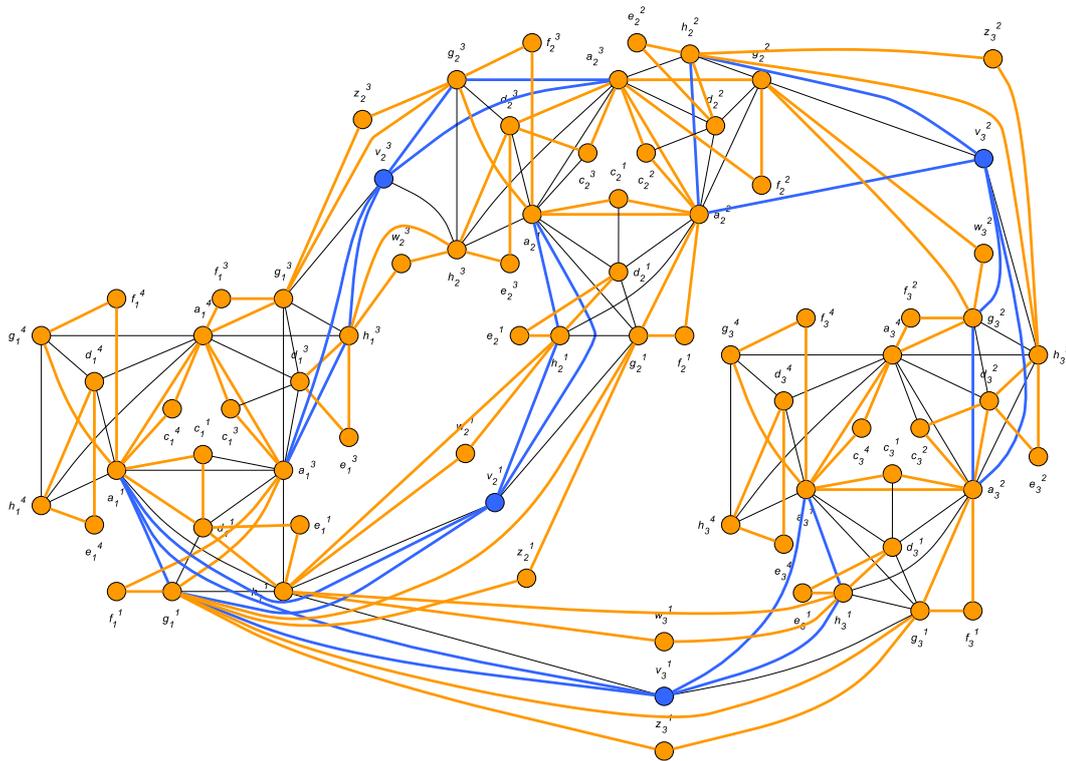


Figura 4.28: Triângulos escolhidos de acordo como Lema de Comunicação de Literais

Agora, iremos abordar os triângulos cobertos por um  $K_{12}$  ou um  $K_5$ .

Primeiro examinaremos os triângulos em um  $K_{12}$ . Temos aqueles formados pelos vértices  $a_j^i$  de uma cláusula  $j$ , como vemos na Figura 4.29.

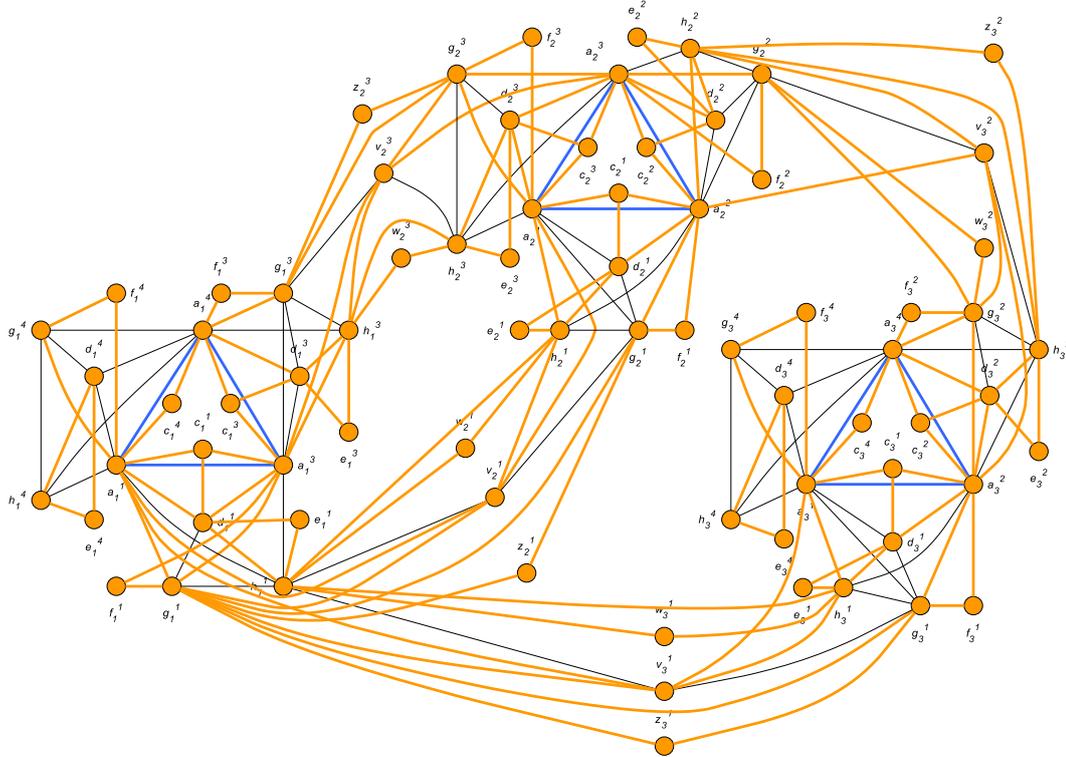


Figura 4.29: Triângulos compostos pelos vértices  $a_j^i$  de uma cláusula  $j$

Também temos os triângulos relacionados ao Lema da Escolha de Cobertura na Figura 4.30 e na Figura 4.31.

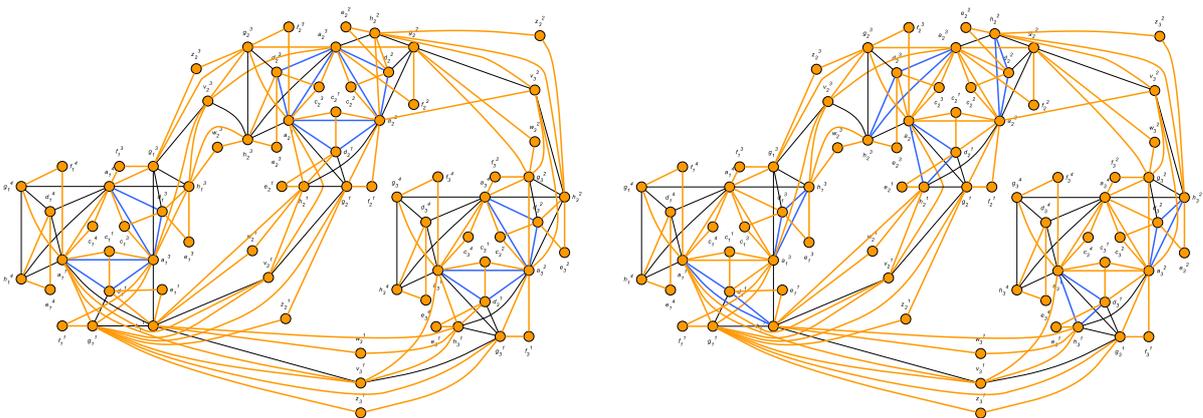


Figura 4.30: Triângulos relacionados ao Lema da Escolha de Cobertura

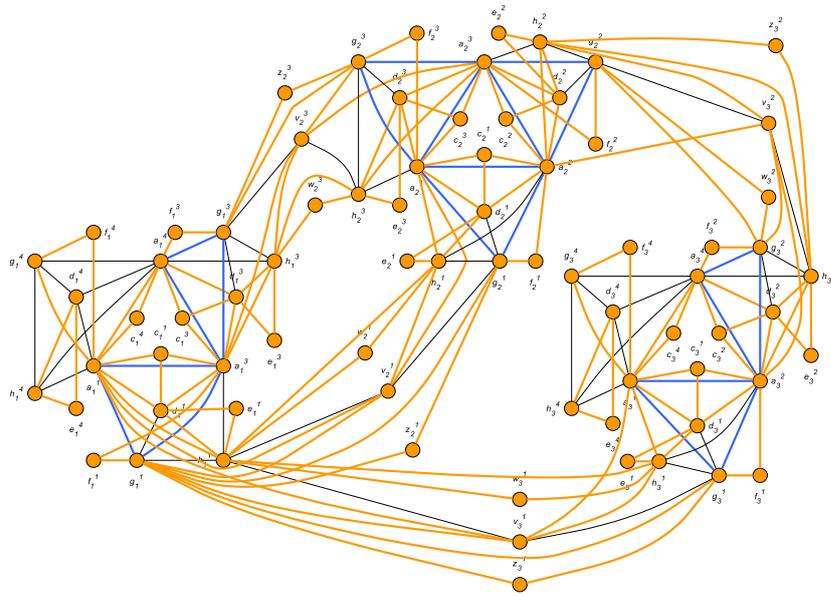


Figura 4.31: Mais triângulos relacionados ao Lema da Escolha de Cobertura

Para finalizar com os triângulos em um  $K_{12}$ , temos aqueles relacionados com o Lema de Comunicação de Literais na Figura 4.32

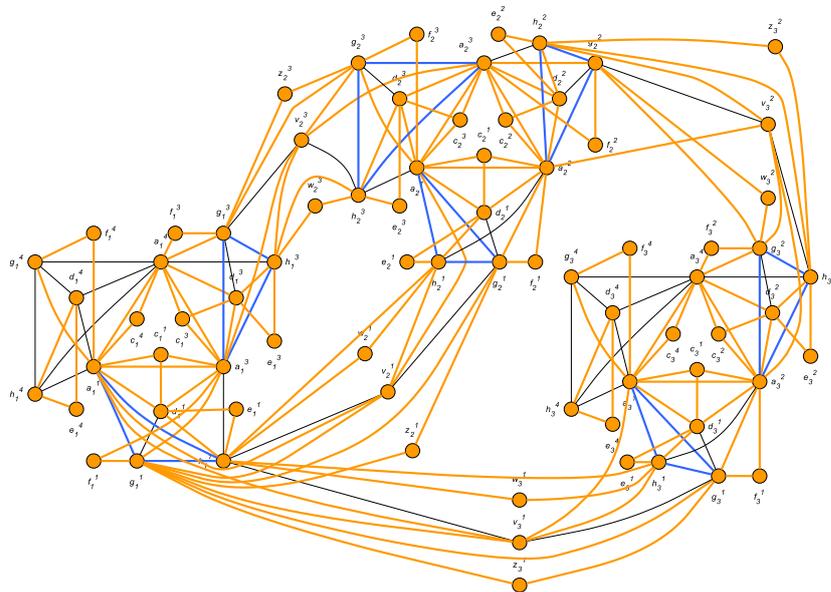


Figura 4.32: Triângulos relacionados ao Lema de Comunicação de Literais

Agora, vamos analisar os triângulos contidos em um  $K_5$ , todos eles se referem ao Lema de Comunicação de Literais, como podemos observar nas Figuras 4.33 e 4.34

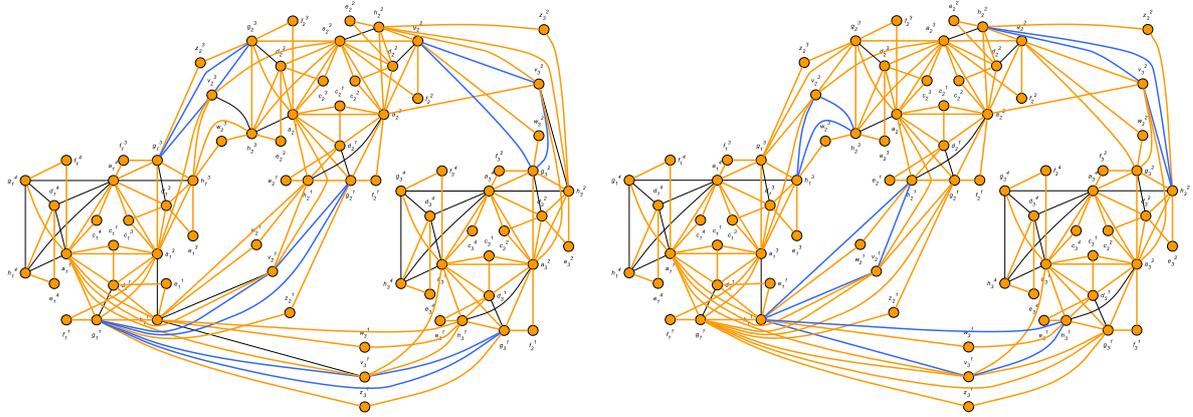


Figura 4.33: Triângulos relacionados ao Lema de Comunicação de Literais

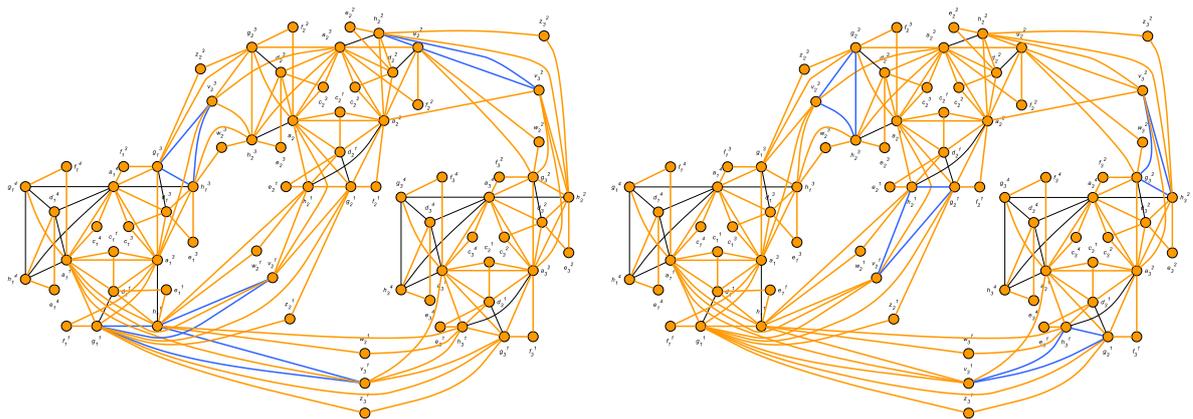


Figura 4.34: Triângulos relacionados ao Lema de Comunicação de Literais

As arestas restantes fazem parte unicamente de um  $K_{12}$  ou  $K_5$ .

## 5 CONCLUSÃO

O trabalho teve como objetivo explicitar todo o conhecimento necessário para a prova de *NP-completude* do problema do grafo clique. Para tal, percorremos o histórico da classe, desde as primeiras discussões de sua caracterização até a determinação dessa dificuldade.

Começamos com a base teórica para a compreensão do estudo. Primeiro, uma breve apresentação dos conceitos de Complexidade Computacional é apresentada, com as classes necessárias, e, depois, as definições de Teoria dos Grafos, com a principal sendo a do grafo clique.

Em seguida, apresentamos as caracterizações do grafo clique, as quais são essenciais para a parte principal. Essas caracterizações da classe começaram com Hamelink (1968), que determinou uma caracterização parcial, a partir da observação da propriedade Helly da cobertura por cliques de um dado grafo  $G$ .

Após isso, com base nesse trabalho anterior, Roberts e Spencer (1971) nos deram a caracterização total do problema, com a cobertura por completos das arestas do grafo clique. Para auxiliar, houve a simplificação da notação, além de exemplos para o entendimento dessa caracterização.

Alcón e Gutierrez (2004) descreveram uma generalização da classe dos grafos clique, baseada na caracterização de Roberts e Spencer. Essa generalização utiliza os triângulos do grafo e, também, os completos que tem uma aresta em comum com estes triângulos. Essa demonstração foi expandida, com as três condições equivalentes rerepresentadas.

Por fim, em (Alcón et al., 2009), a dificuldade do problema de decisão do grafo clique é demonstrada. No começo, uma variação do 3SAT, o  $3SAT_{\frac{1}{3}}$  é apresentada, junto de sua redução para o 3SAT. A partir de instâncias do  $3SAT_{\frac{1}{3}}$ , um grafo  $G_I$  composto por completos é obtido. Dois componentes que simulam as cláusulas e variáveis são definidos, o de Atribuição de Valores e o de Teste de Satisfação, esses componentes são responsáveis por atribuir valor às variáveis e manter a coesão entre as cláusulas no grafo obtido, respectivamente.

Com esses componentes, basta mostrar que o grafo  $G_I$  obtido pelas instruções tem uma Família-RS, uma família de completos que não são contidos uns nos outros. A partir desse objetivo, as arestas são cobertas uma a uma, explicitamente por meio de figuras.

Os estudos futuros que podem decorrer deste trabalho são o aprofundamento de problemas adjacentes ao grafo clique, como as classe dos grafos clique-cordal e biclique, cujas dificuldades não são conhecidas. Outra família de classes para esse estudo são aquelas em que a propriedade Helly é parte de sua definição.

## REFERÊNCIAS

- Alcón, L., Faria, L., de Figueiredo, C. M. e Gutierrez, M. (2009). The complexity of clique graph recognition. *Theoretical Computer Science*, 410(21-23):2072–2083.
- Alcón, L. e Gutierrez, M. (2004). Cliques and extended triangles. a necessary condition for planar clique graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 141(1-3):3–17.
- Berge, C. (1987). *Hypergraphes: combinatoire des ensembles finis*. Mu B. Gauthier-Villars.
- Bondy, A. e Murty, U. (2011). *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer London.
- Hamelink, R. C. (1968). A partial characterization of clique graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 5(2):192–197.
- Papadimitriou, C. (1994). *Computational Complexity*. Theoretical computer science. Addison-Wesley.
- Roberts, F. S. e Spencer, J. H. (1971). A characterization of clique graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 10(2):102–108.